

ФЕДЕРАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**А. Н. Петенёв, А. В. Орлянский, В. Ю. Гальков**

# **ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ДЕТАЛЕЙ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов, обучающихся по специальностям  
35.03.06 – «Агроинженерия», 23.03.03 – «Эксплуатация  
транспортных и технологических машин и комплексов»

Ставрополь  
«АГРУС»  
2015

УДК 631.171  
ББК 40.7  
П29

**Авторы:**

кандидат технических наук, доцент *А. Н. Петенёв*;  
кандидат технических наук, доцент *А. В. Орлянский*;  
ассистент *В. Ю. Гальков*

**Петенёв, А. Н.**

П26           Элементы геометрии деталей : учебно-методическое пособие /  
А. Н. Петенёв, А. В. Орлянский, В. Ю. Гальков. – Ставрополь :  
АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2015. – 56 с.

ISBN 978-5-9596-1168-2

Содержит примеры выполнения различных вариантов сопряжений прямых линий и дуг окружностей и использования сопряжений в проектировании контуров деталей.

Для самостоятельной работы студентов бакалавриата факультета механизации сельского хозяйства, изучающих дисциплину «Начертательная геометрия. Инженерная графика» по направлениям подготовки 35.03.06 – «Агроинженерия», 23.03.03 – «Эксплуатация транспортных и технологических машин и комплексов».

**УДК 631.171**  
**ББК 40.7**

*Рекомендовано методическим советом Ставропольского  
государственного аграрного университета к изданию  
(протокол № 10 от 12.05.2015)*

**ISBN 978-5-9596-1168-2**

© ФГБОУ ВПО Ставропольский государственный  
аграрный университет, 2015

## ВВЕДЕНИЕ ВИДЫ СОПРЯЖЕНИЙ

Технология изготовления, эксплуатационные характеристики, эргономика и другие факторы обуславливают наличие плавных переходов в очертаниях различных изделий. Плавные переходы от одной линии к другой в чертёжной практике называются *сопряжениями*. В технике широко используются непосредственные сопряжения и сопряжения промежуточными дугами [1-12].

*Непосредственные сопряжения* – это плавные переходы от одной линии к другой без промежуточных линий. Возможен переход от прямой к дуге окружности (Рисунок 1), от одной дуги к другой (Рисунки 2, 3).

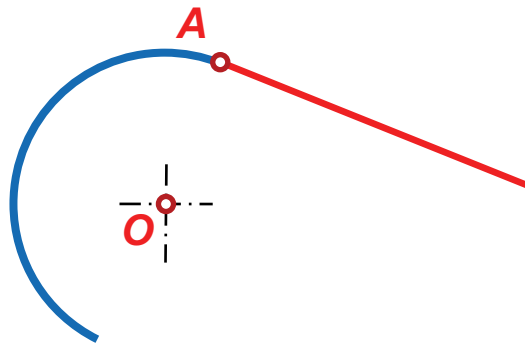


Рисунок 1 – Непосредственное сопряжение прямой и дуги окружности

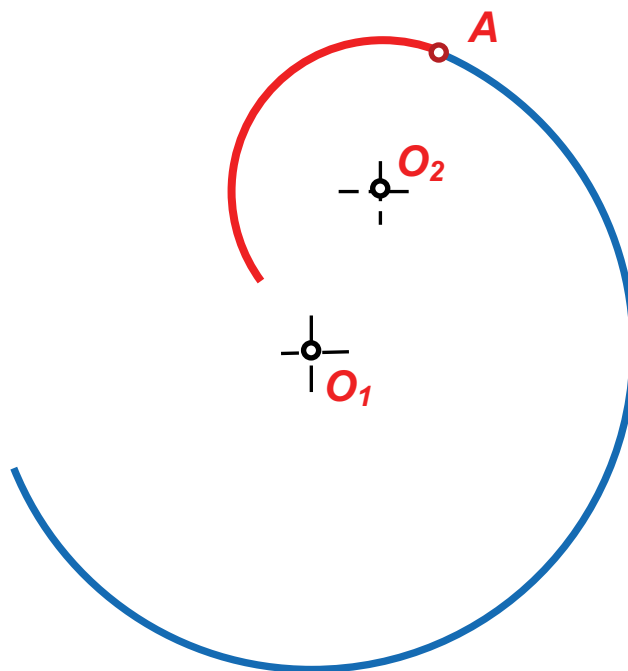


Рисунок 2 – Непосредственное внутреннее сопряжение прямой и дуги окружности

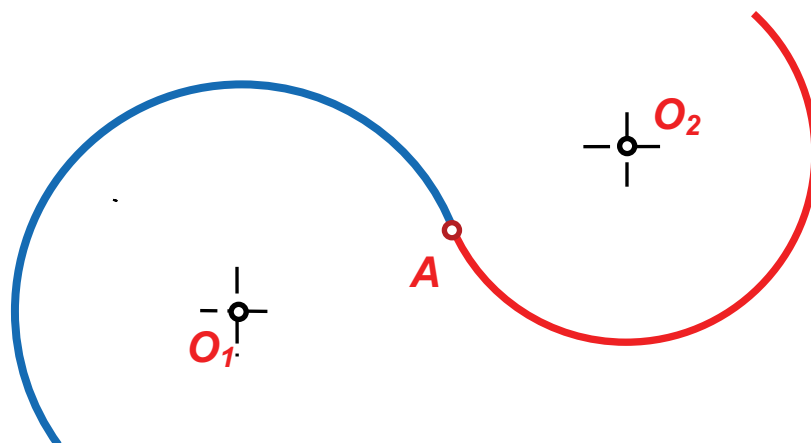


Рисунок 3 – Непосредственное внешнее сопряжение прямой и дуги окружности

**Сопряжения промежуточными дугами** – это плавные переходы от одной линии к другой посредством промежуточной дуги окружности. Возможен переход от одной прямой к другой (Рисунки 4, 5), от прямой к окружности (Рисунки 6, 7) и от одной окружности к другой (Рисунки 8, 9, 10) [1-12].

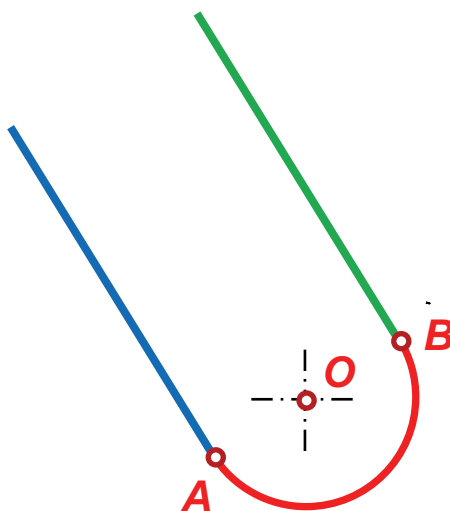


Рисунок 4 – Сопряжение промежуточной дугой параллельных прямых

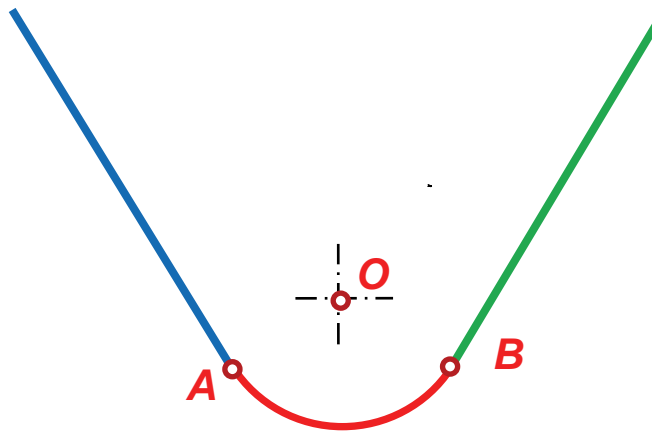


Рисунок 5 – Сопряжение промежуточной дугой пересекающихся прямых

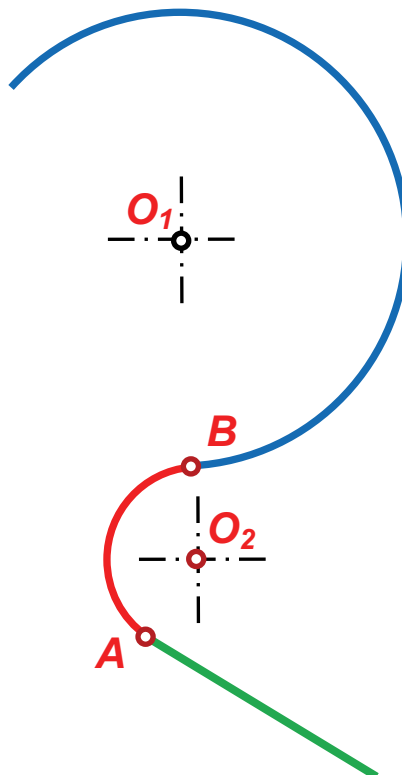


Рисунок 6 – Внешнее сопряжение промежуточной дугой прямой и дуги окружности

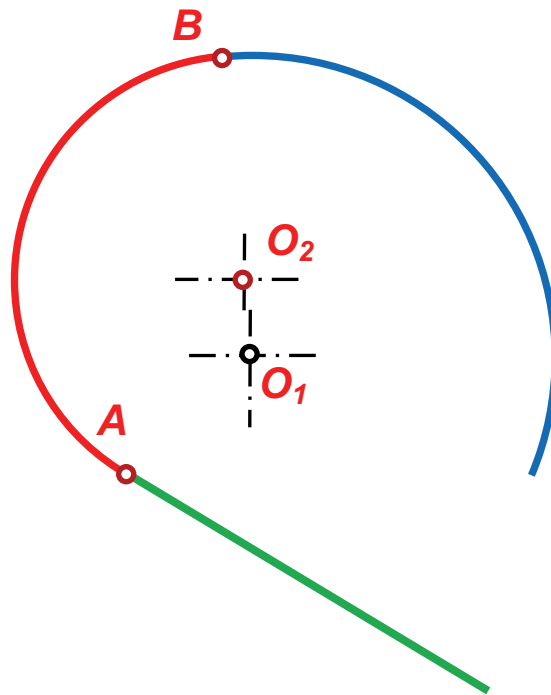


Рисунок 7 – Внутреннее сопряжение промежуточной дугой прямой и дуги окружности

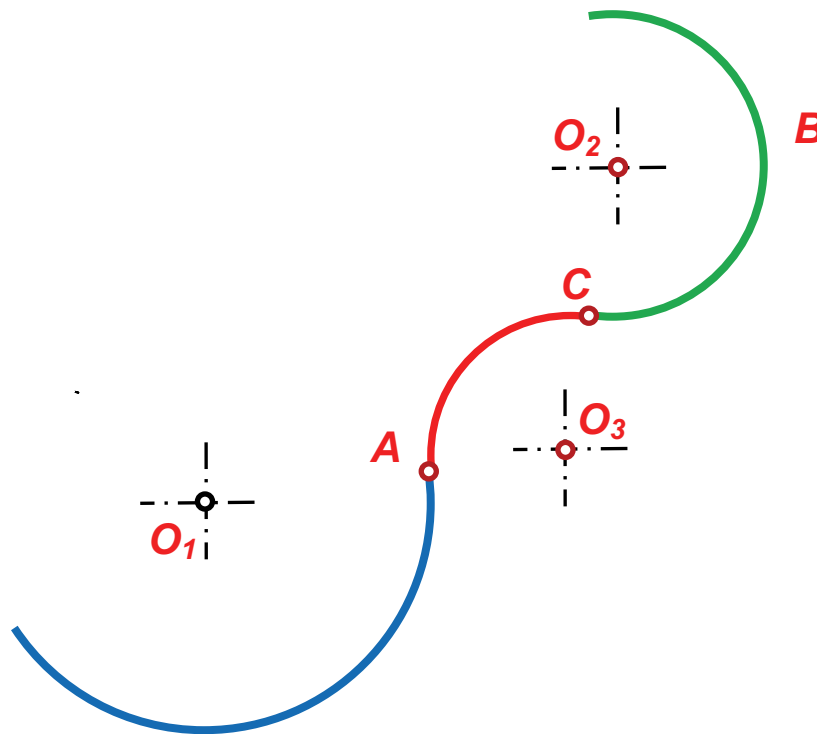


Рисунок 8 – Внешнее сопряжение промежуточной дугой двух дуг

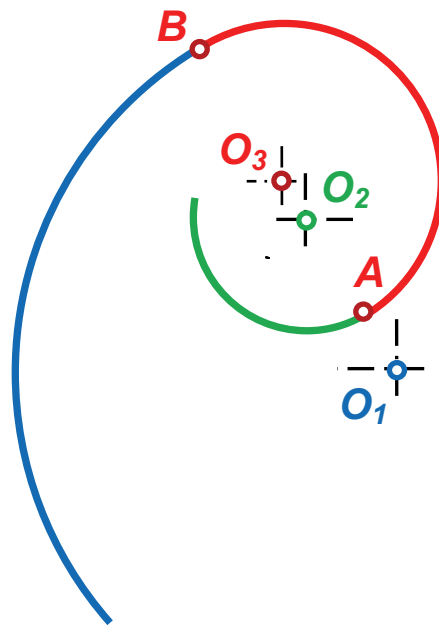


Рисунок 9 – Внутреннее сопряжение промежуточной дугой двух дуг

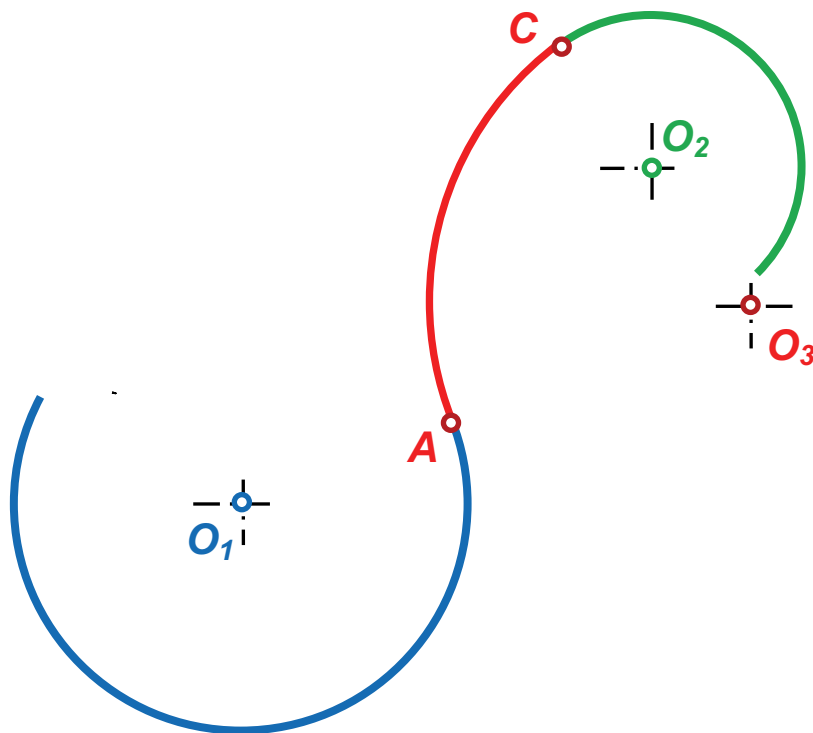
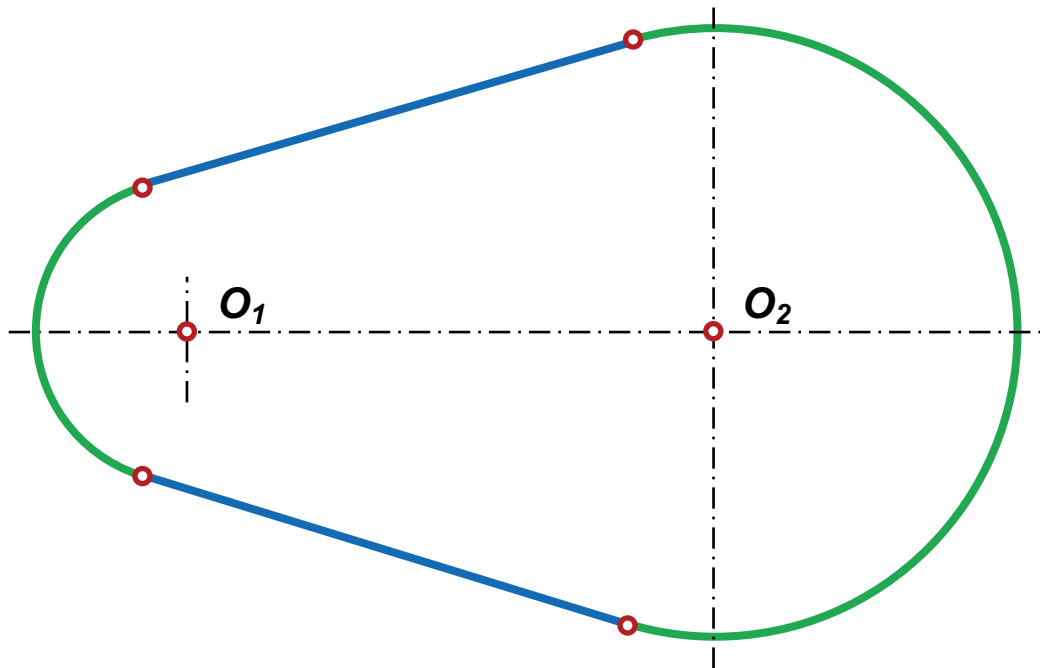
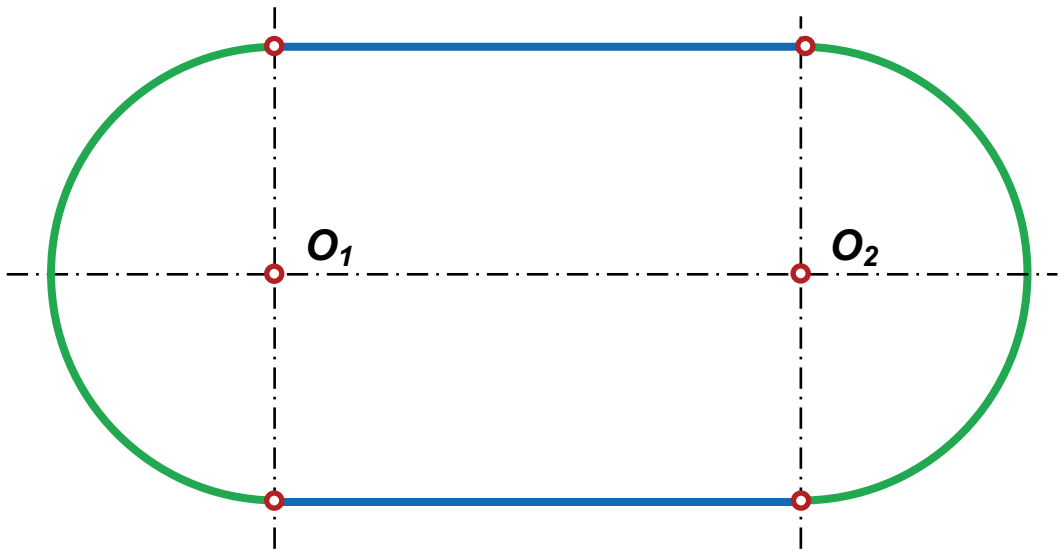


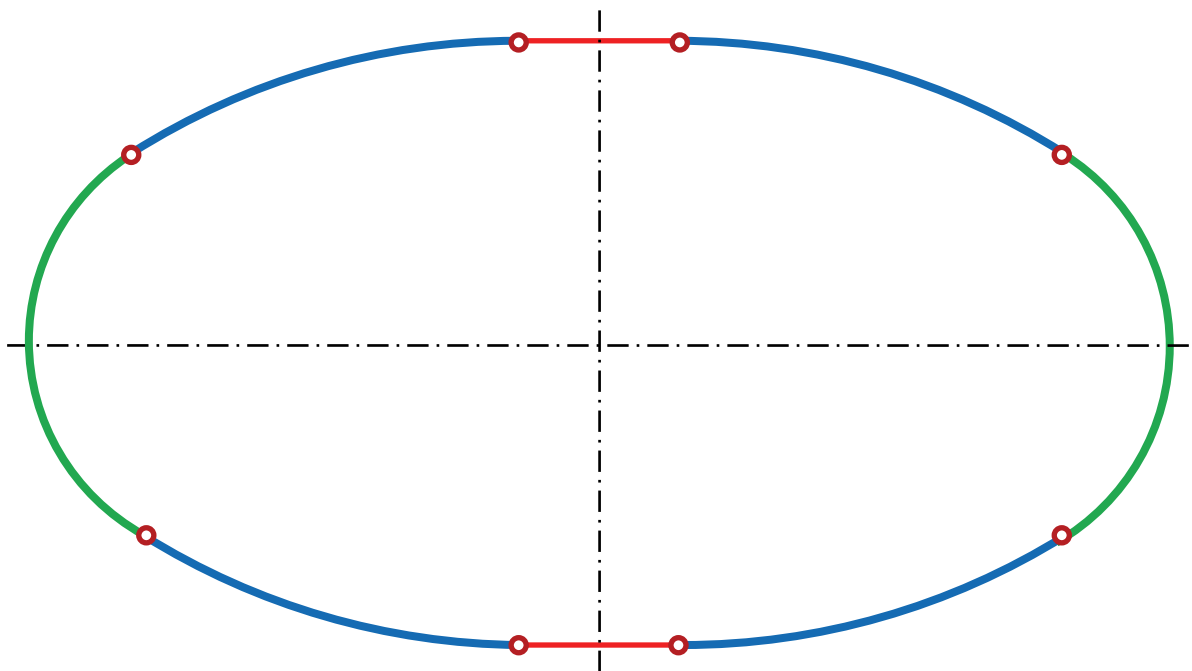
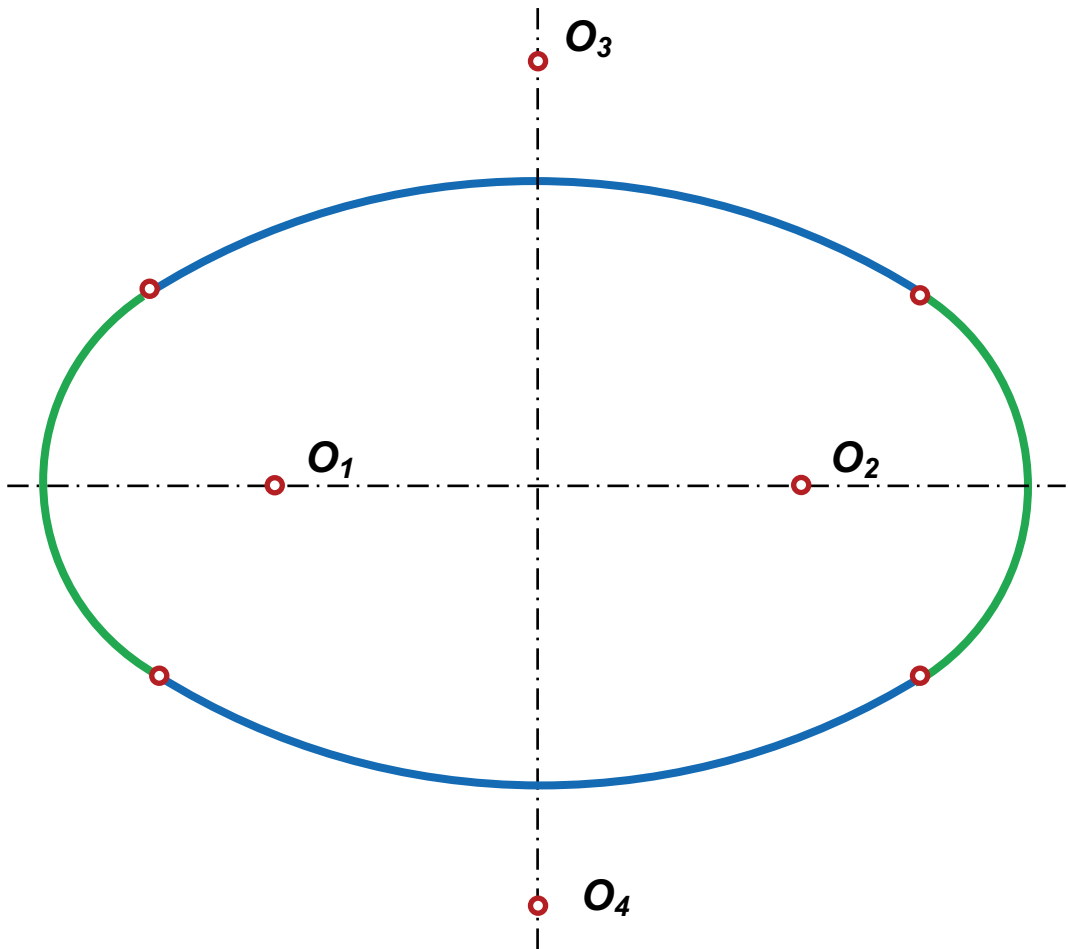
Рисунок 10 – Смешанное сопряжение промежуточной дугой двух дуг

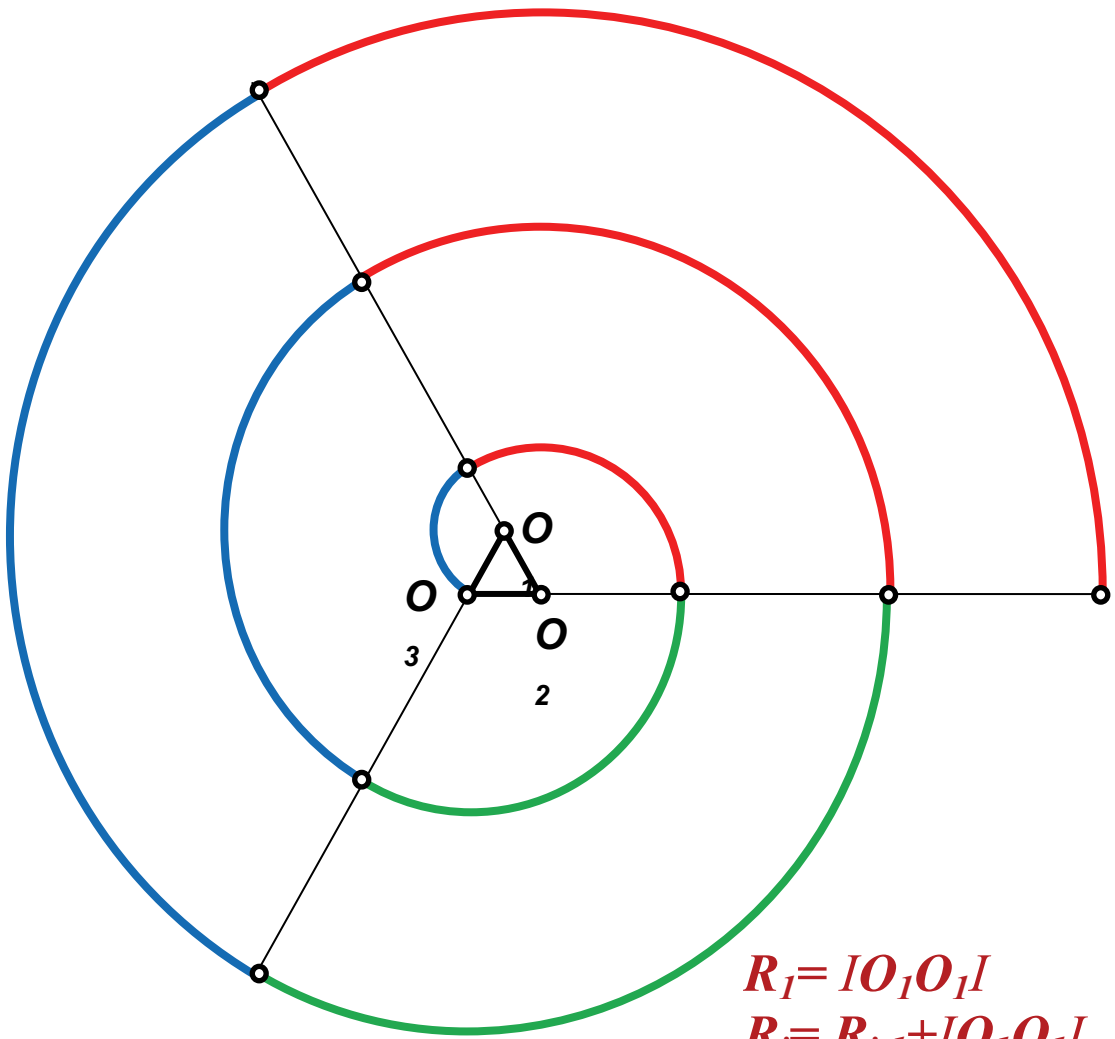
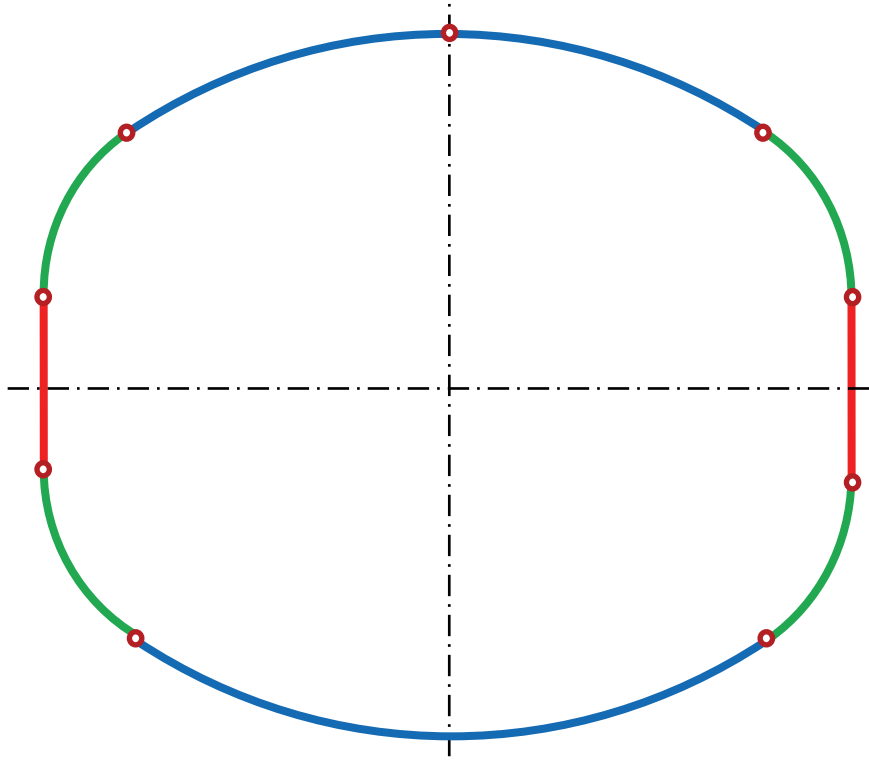
В технике широко используются кривые линии, содержащие сопряжения:

**Коробовая кривая** – это кривая, составленная из взаимно сопряженных дуг окружностей различного диаметра.

**Завитки** - это плоские кривые, составленные из дуг окружностей, проводимых и двух и более центров [1-12].







$$R_1 = IO_1O_1I$$

$$R_i = R_{i-1} + IO_1O_1I$$

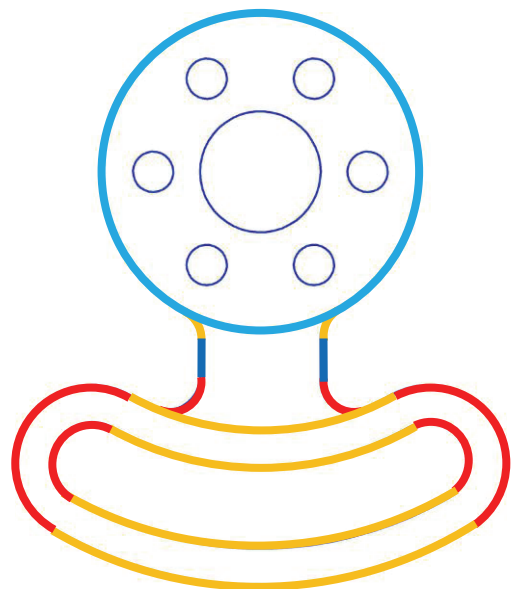
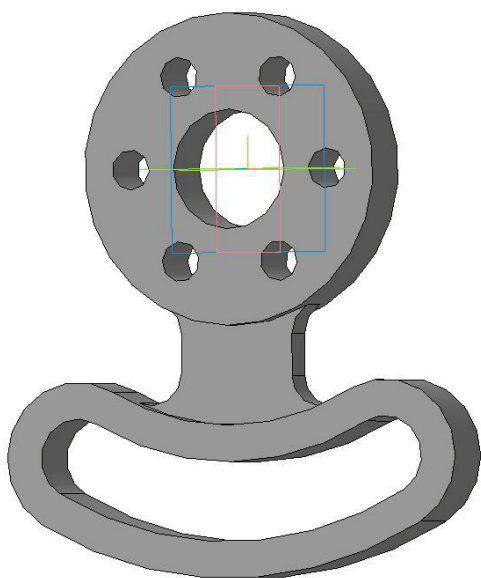
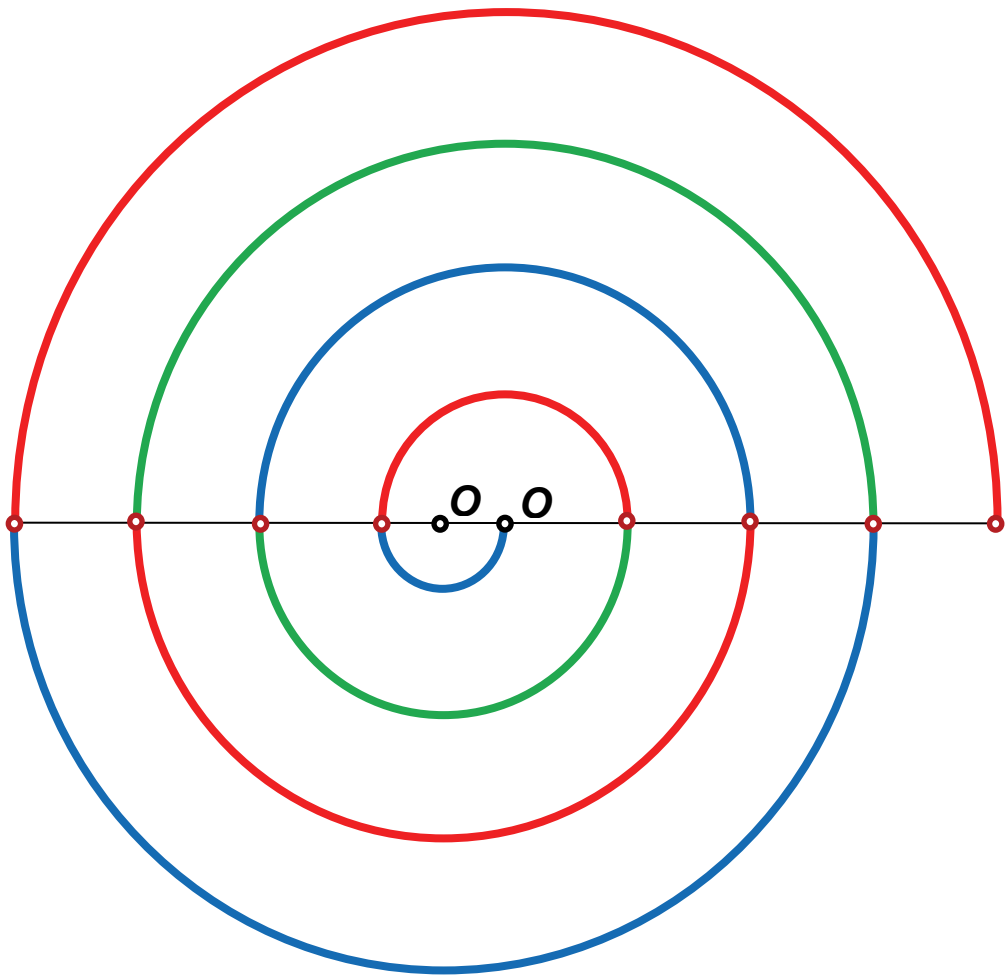


Рисунок 11 – Деталь «Гитара»

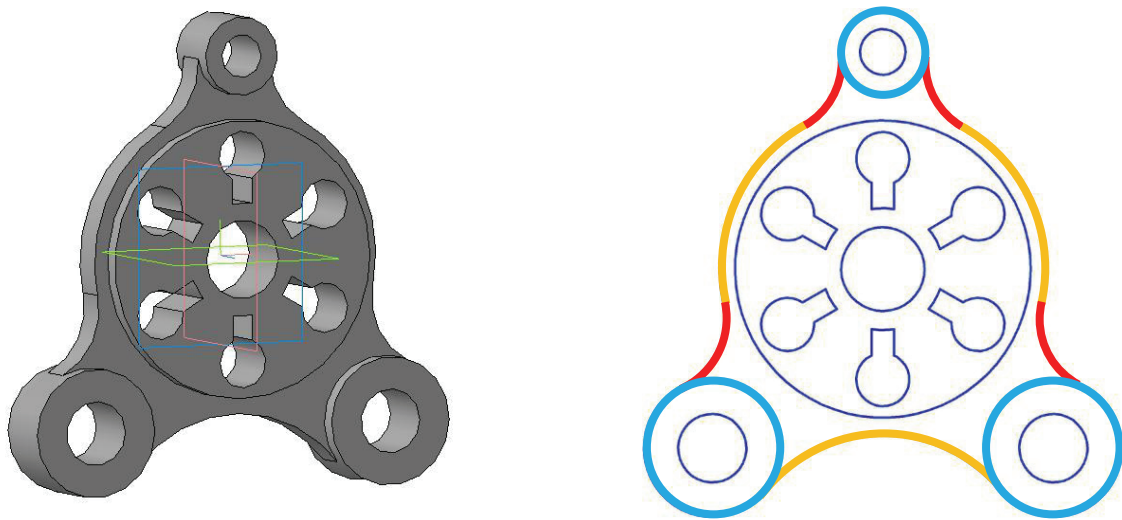


Рисунок 12 – Деталь «Крышка»

На рисунках 11, 12 приведены примеры изделий, содержащих в проекциях коробовые кривые.

**Завитки** - это плоские кривые, составленные из дуг окружностей, проводимых и двух и более центров.

**Коробовая кривая** – это кривая, составленная из взаимно сопряженных дуг окружностей различного диаметра.

Точка перехода одной линии в другую называется **точкой сопряжения**, промежуточная дуга – **дугой сопряжения**, её радиус – **радиусом сопряжения**. Для построения сопряжения необходимо знать положение точек сопряжения, радиуса сопряжения, центра кривизны дуги сопряжения.

В процессе проектирования решают задачи построения сопряжений по различным заданным условиям:

- задан радиус дуги сопряжения, необходимо определить центр кривизны дуги сопряжения и точки сопряжения;

- задана точка сопряжения на одной из линий, необходимо определить радиус кривизны дуги сопряжения, положение её центра и второй точки сопряжения.

Для решения данных задач необходимо уметь строить касательные к окружностям в точке окружности и через внешнюю точку, помнить следующие правила:

1. *Прямая, касательная окружности, составляет прямой угол с радиусом, проведённым в точку касания* (Рисунок 13).

2. *Геометрическим местом центров окружностей, касательных к данной прямой, является прямая параллельная данной прямой и отстоящая от неё на величину радиуса* (Рисунок 14).

3. *Точка касания двух окружностей (сопряжения) находится на линии, соединяющей их центры* (Рисунки 15, 16).

4. *Центры окружностей соприкасающихся внешним образом находятся на расстоянии суммы их радиусов* (Рисунок 17), *а внутренним – на расстоянии разности их радиусов* (Рисунок 18).

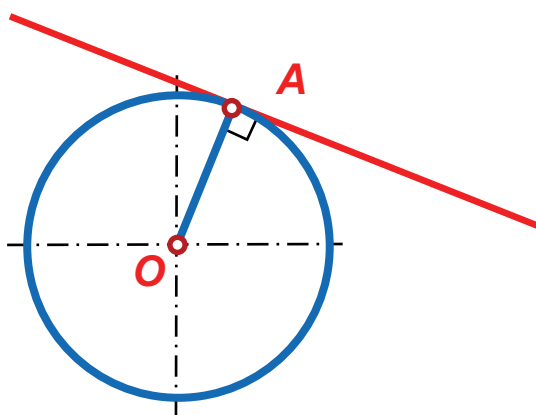


Рисунок 13 – Прямая, касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

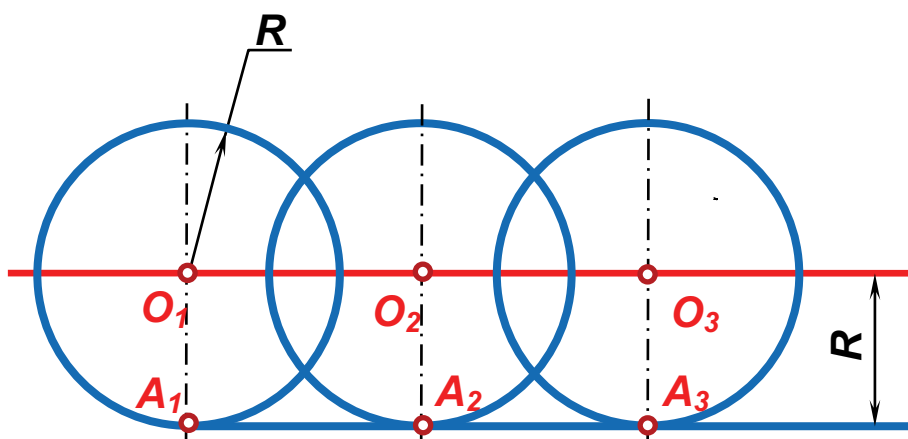


Рисунок 14 – Геометрическое место центров окружностей, касательных к данной прямой - прямая параллельная данной прямой и удалённая от неё на величину радиуса

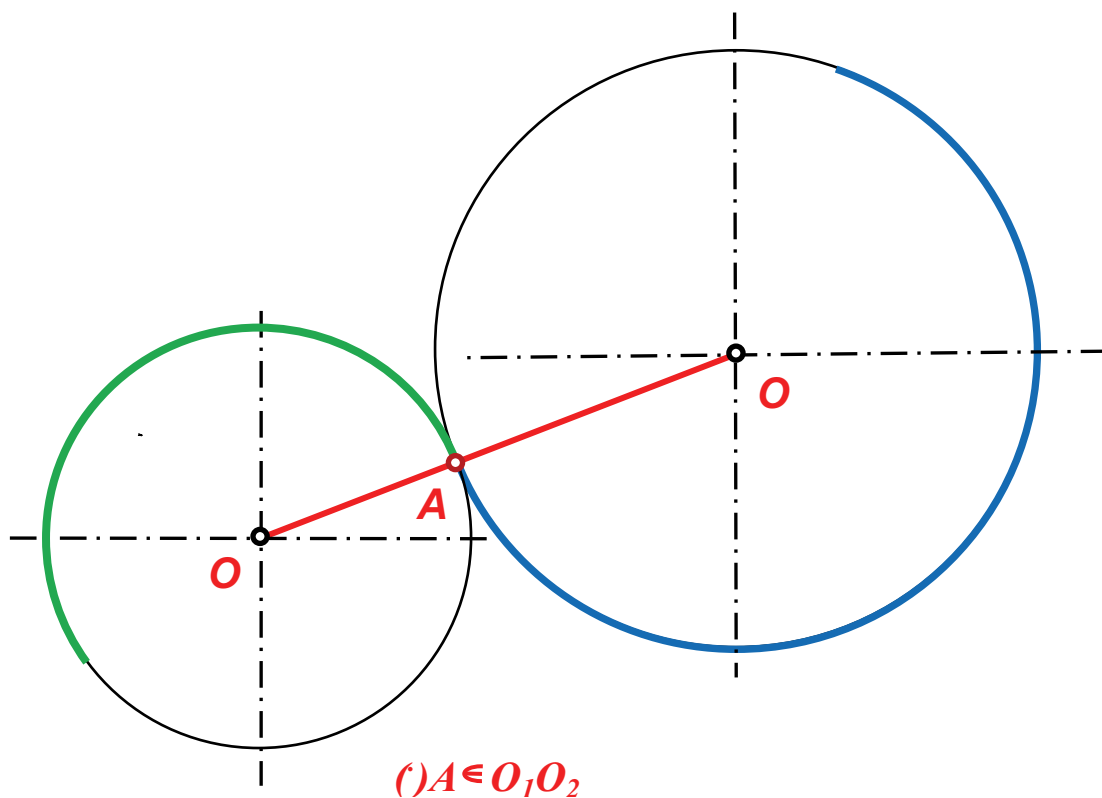


Рисунок 15 – Точка касания двух окружностей (внешнего сопряжения) находится на линии, соединяющей их центры

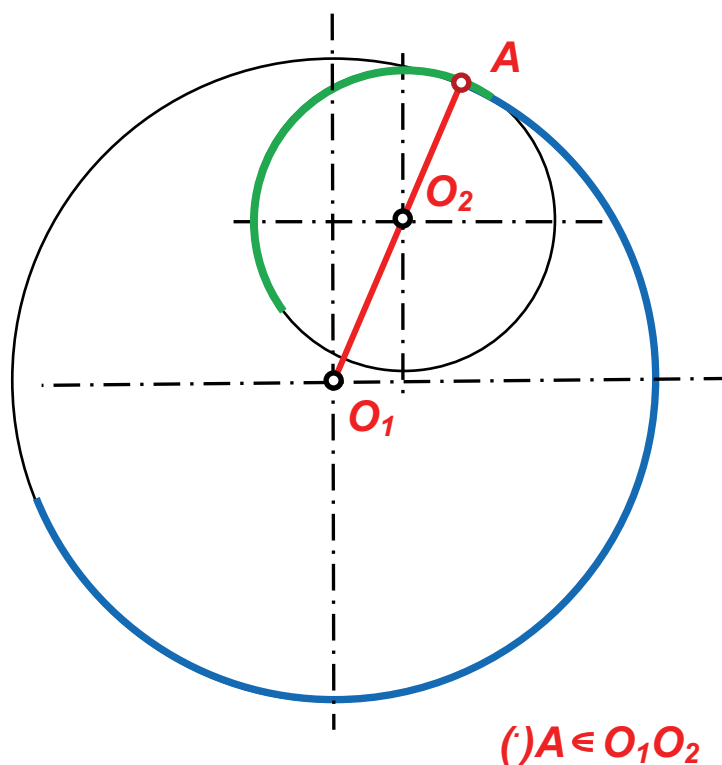


Рисунок 16 – Точка касания (внутреннего сопряжения) двух окружностей находится на прямой линии, проходящей через их центры

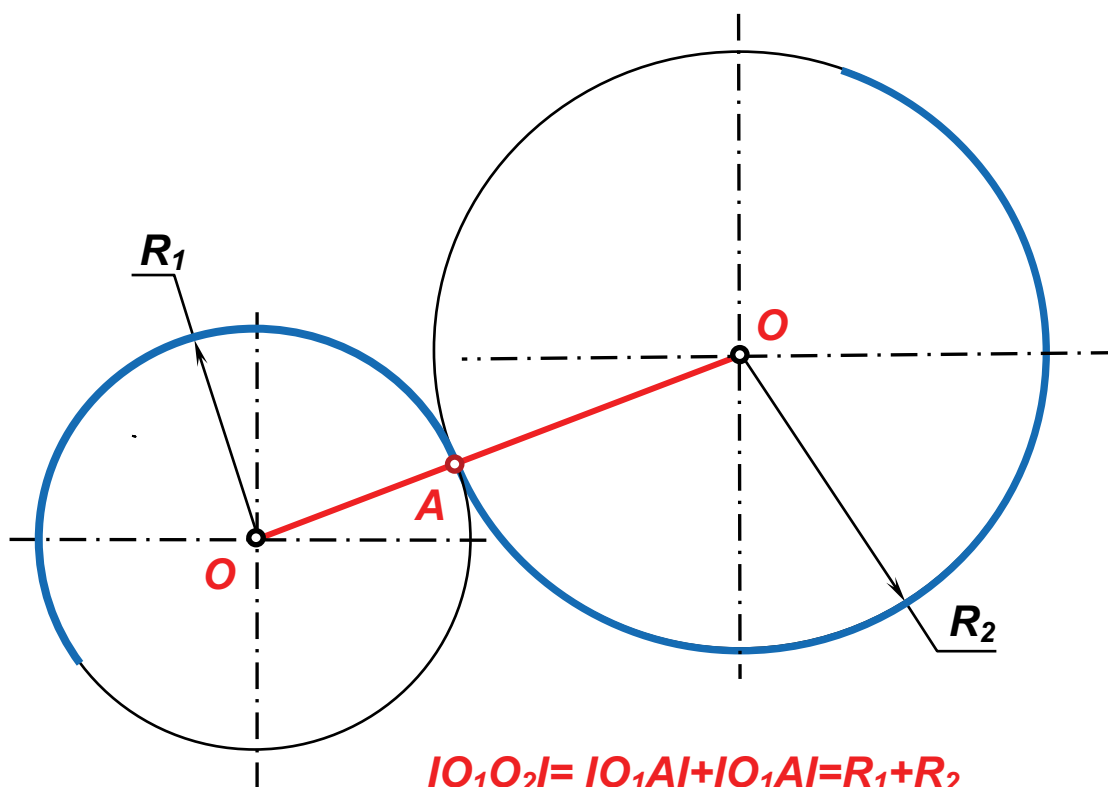


Рисунок 17 – Расстояние между центрами окружностей соприкасающихся внешним

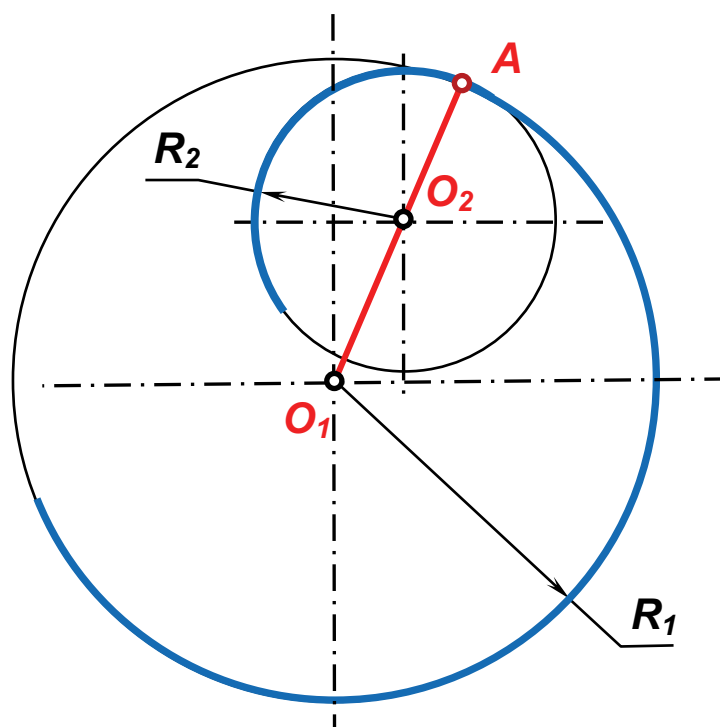


Рисунок 18 – Центры окружностей соприкасающихся внутренним образом находятся на расстоянии разности их радиусов

Исходя из правила 1 можно сделать выводы:

– *геометрическим местом центров кривизны дуг сопряжения двух пересекающихся прямых является биссектриса угла между ними* (Рисунок 19);

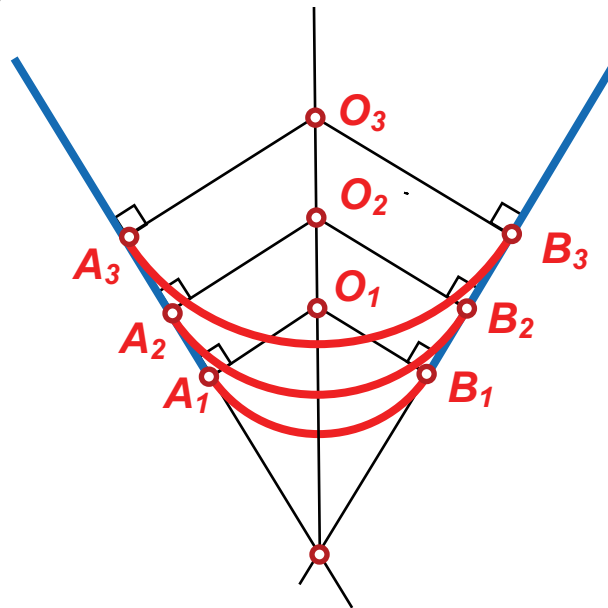
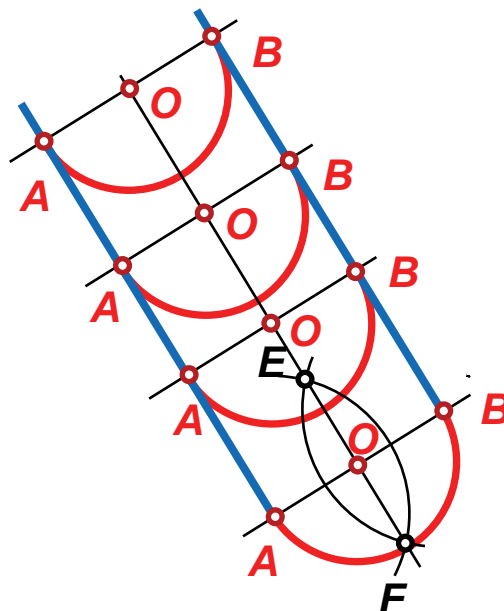


Рисунок 19 – Положение центров кривизны дуг сопряжения двух пересекающихся прямых

– *геометрическим местом центров кривизны дуг сопряжения двух параллельных прямых – прямая, равноудалённая от них* (Рисунок 20).



$$\{({}')O_1, (')O_2, (')O_3, \dots (')O_n\}$$

Рисунок 20 – геометрическим местом центров кривизны дуг сопряжения двух параллельных прямых – прямая, равноудалённая от них

# 1. КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТЯМ

## 1.1. Построение касательной к окружности через точку, лежащую вне окружности

Дано: Окр.  $(O, R)$ ,  $(\cdot) A$ .

Построить:

- точку касания  $B$  на окружности;
- через точку  $A$  прямую  $AB$ , касательную к окружности.

Решение:

1. Соединяем отрезком  $OA$  центр окружности  $O$  с заданной точкой касательной  $A$  (Рисунок 21).
2. Находим середину отрезка  $OA$  методом построения серединного перпендикуляра.
3. Строим дугу с центром в точке  $O_1$  размера  $r_1 = IO_1OI$ .
4. Построенная дуга  $(O_1, r_1)$  пересекает окружность  $(O, R)$  в точке  $B$ , являющейся искомой точкой касания.
5. Через точки  $A$  и  $B$  проводим прямую. Отрезок  $O_1O_2$  пересекает окружность  $(O, R)$  в точке сопряжения  $B$ .

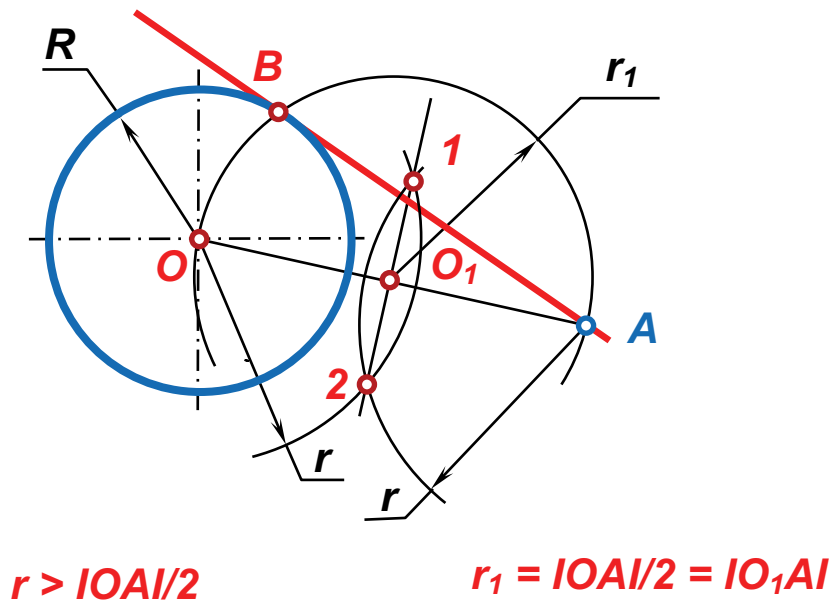


Рисунок 21 – Построение касательной к окружности через точку, лежащую вне окружности

## 1.2. Построение внешней касательной к двум окружностям

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , Окр.  $(O_2, R_2)$ .

Построить:

- точки касания  $A$  и  $B$  на окружности;
- прямую  $AB$ , касательную к окружностям.

Решение:

1. Из центра большей окружности строим дугу радиуса  $R_3 = R_2 - R_1$  (Рис. 22).
2. Соединяем отрезком  $O_1O_2$  центры окружностей (Рисунок 25).
3. Находим середину  $O_3$  отрезка  $O_1O_2$  методом построения серединного перпендикуляра.
4. Строим дугу с центром в точке  $O_3$  размера  $r_2 = IO_1O_3I$ .
5. Построенная дуга  $(O_3, r_2)$  пересекает окружность  $(O_2, R_3)$  в точках  $3$  и  $4$ , являющихся точками касания прямой проходящей через центр  $O_1$ .
6. Через точки  $3$  и  $4$  из центра  $O_2$  проводим прямые до пересечения с окружностью  $(O_2, R_2)$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ , являющихся точками касания искомым прямым с окружностью  $(O_2, R_2)$ .
7. Прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , касательные к двум окружностям перпендикулярны отрезкам  $O_2A_1$  и  $O_2A_2$ . Из свойств касательной к окружности следует, что отрезки  $O_1B_1$  и  $O_1B_2$  параллельны отрезкам  $O_2A_1$  и  $O_2A_2$  и точки касания  $B_1$  и  $B_2$  прямой с окружностью  $(O_1, R_1)$  могут быть определены на пересечении этих отрезков с окружностью.
8. Задача имеет два решения - прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  являются внешними касательными к двум окружностям  $(O_1, R_1)$  и  $(O_2, R_2)$ .

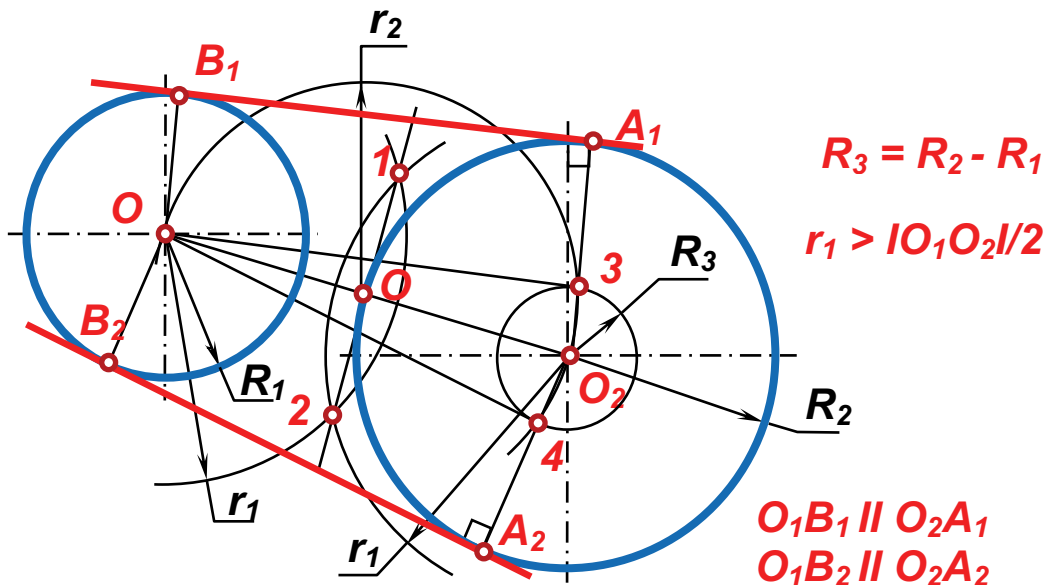


Рисунок 22 – Построение внешней касательной к двум окружностям.

### 1.3. Построение касательной к двум окружностям, проходящей между центрами окружностей

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , Окр.  $(O_2, R_2)$ .

Построить:

- точки касания  $A$  и  $B$  на окружности;
- прямую  $AB$ , касательную к окружностям.

Решение:

1. Из центра одной окружности строим дугу радиуса  $R_3 = R_2 + R_1$  (Рис. 23).
2. Соединяем отрезком  $O_1O_2$  центры окружностей.
3. Находим середину  $O_3$  отрезка  $O_1O_2$  методом построения серединного перпендикуляра.
5. Строим дугу с центром в точке  $O_3$  размера  $r_2 = IO_1O_3I$ .
6. Построенная дуга  $(O_3, r_2)$  пересекает окружность  $(O_1, R_3)$  в точках  $3$  и  $4$ , являющихся точками касания с прямой проходящей через центр  $O_2$ .
7. Через точки  $3$  и  $4$  из центра  $O_1$  проводим прямые, пересекающие окружность  $(O_1, R_1)$  в точках  $B_1$  и  $B_2$ , являющихся точками касания искомым прямым с окружностью  $(O_1, R_1)$ .
8. Прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , касательные к двум окружностям перпендикулярны отрезкам  $O_1B_1$  и  $O_1B_2$ . Из свойств касательной к окружности следует, что отрезки  $O_2A_1$  и  $O_2A_2$  параллельны отрезкам  $O_1B_1$  и  $O_1B_2$  и точки касания  $A_1$  и  $A_2$  прямой с окружностью  $(O_2, R_2)$  могут быть определены на пересечении этих отрезков с окружностью.
9. Задача имеет два решения - прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  являются касательными к двум окружностям  $(O_1, R_1)$  и  $(O_2, R_2)$ , проходящими между их центрами.

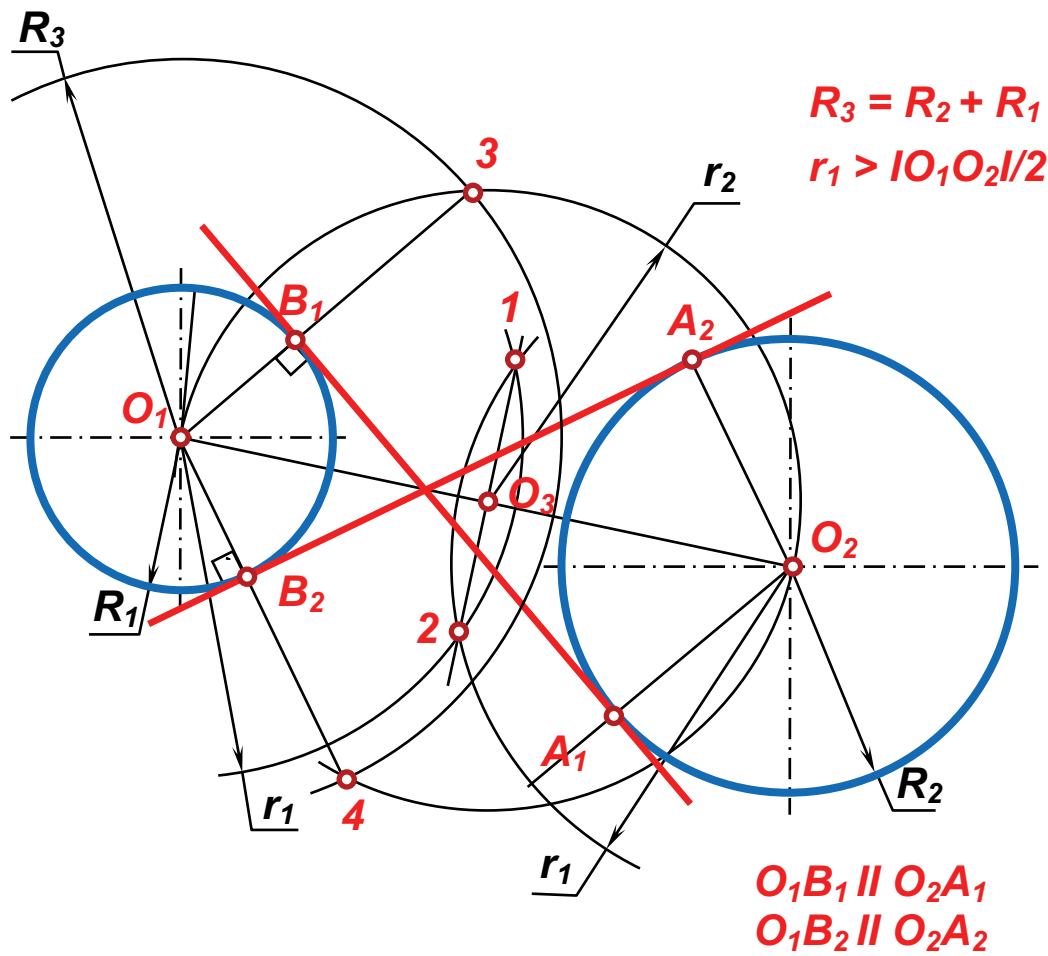


Рисунок 23 – Построение касательной к двум окружностям, проходящей между центрами окружностей

## 2. СОПРЯЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

### 2.1. Сопряжение параллельных прямых

Центр кривизны дуги сопряжения является серединой отрезка, перпендикулярного прямым. Если задана точка сопряжения, то перпендикуляр проводится через заданную точку.

На рисунке 24 приведён пример сопряжения двух параллельных прямых. Здесь перпендикуляр  $A_1B_1$ , проведённый к параллельным прямым в точке сопряжения  $A_1$ , пересекает прямую, равноудалённую от данных прямых в центре сопряжения  $O_1$ . Вторую прямую перпендикуляр пересекает в точке сопряжения  $B_1$ . Перпендикуляр из точки сопряжения  $A_2$  пересекает вторую прямую в точке сопряжения  $B_2$ , а равноудалённую от них прямую в центре кривизны дуги сопряжения  $O_2$ . Радиус кривизны двух параллельных прямых равен половине расстояния между ними, т.е. половине отрезка  $A_1B_1$ .

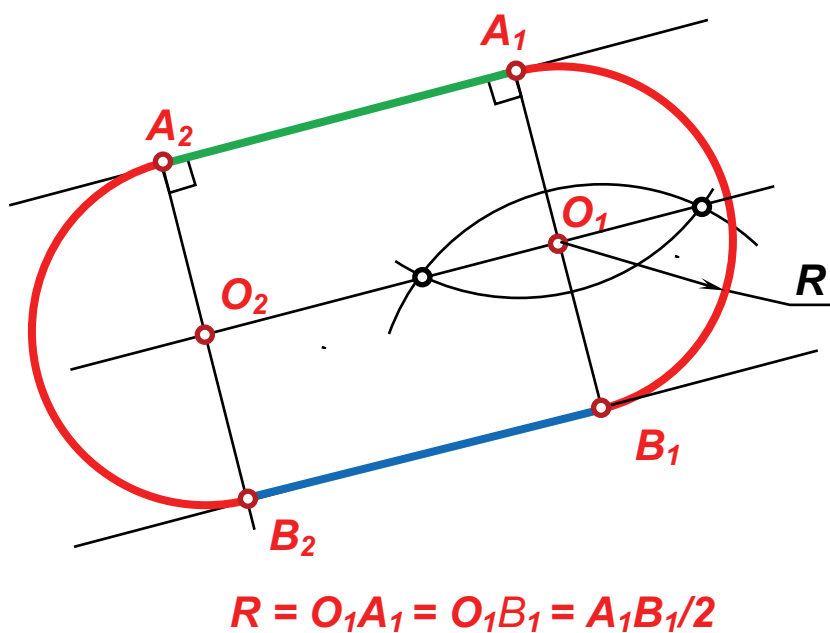


Рисунок 24 – Сопряжения двух параллельных прямых

## 2.2. Сопряжение пересекающихся прямых в заданной точке сопряжения

Центр кривизны дуги сопряжения является точкой пересечения перпендикуляра к прямой, проведённым в заданной точке, с биссектрисой угла между прямыми. Основания перпендикуляров являются точками сопряжения.

На рисунке 25 приведён пример сопряжения двух пересекающихся прямых. Здесь перпендикуляр  $A_1O_1$ , проведённый к прямой в точке сопряжения  $A_1$ , пересекает биссектрису  $SE$  угла  $ASB$  в центре сопряжения  $O$ . Перпендикуляр из точки сопряжения  $O$  пересекает вторую прямую в точке сопряжения  $B$ . Радиус кривизны дуги сопряжения равен величине отрезка  $AO$ .

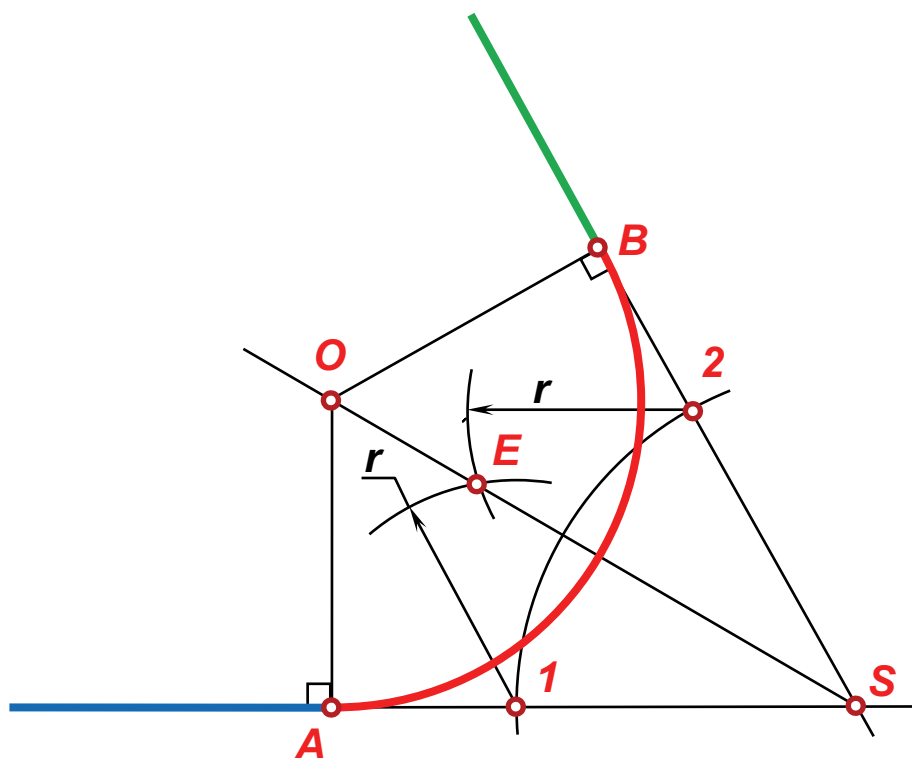


Рисунок 24 – Сопряжения двух пересекающихся прямых

### 2.3. Сопряжение пересекающихся прямых дугой заданного радиуса

Центр кривизны  $O$  дуги сопряжения является точкой пересечения прямых, удаленных от заданных на расстояние, равное заданному радиусу дуги сопряжения  $R$ . Точки  $A$  и  $B$  - основания перпендикуляров  $OA$  и  $OB$ , проведённых к прямым из центра кривизны являются точками сопряжения.

На рисунке 26 приведён пример сопряжения двух пересекающихся прямых дугой заданного радиуса.

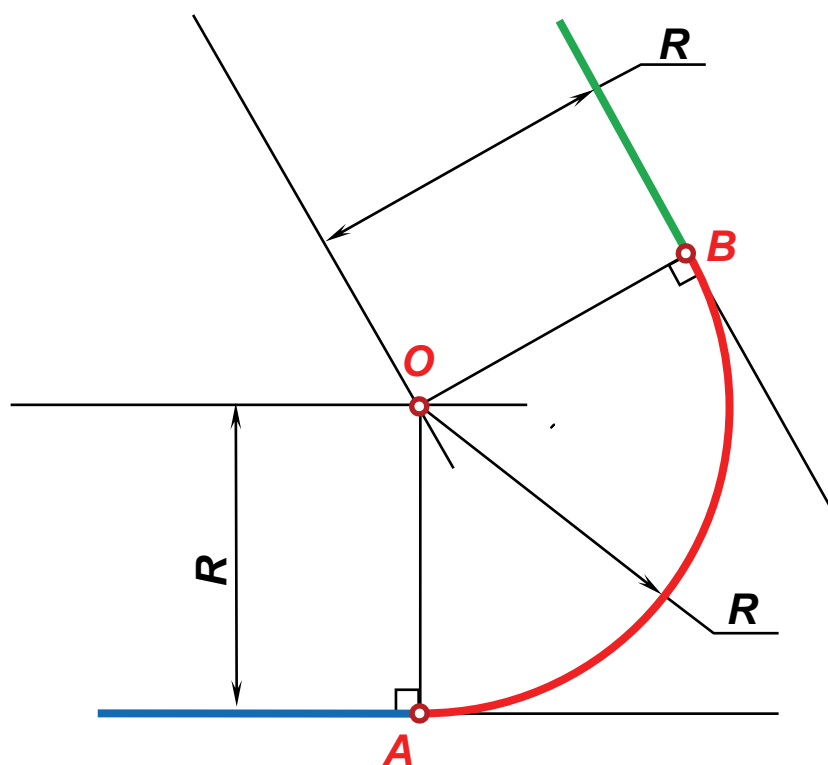


Рисунок 26 – Сопряжение пересекающихся прямых дугой заданного радиуса

### 3. СОПРЯЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ

#### 3.1. Сопряжение окружности и прямой дугой заданного размера

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ ,  $m$ ,  $r$ .

Определить:

- точки сопряжения  $A$  и  $B$  на окружности и прямой;
- центр кривизны  $O_3$  дуги сопряжения.

Решение:

1. Строим из центра окружности  $O_1$  дугу размера  $r + R_1$  для внешнего сопряжения (Рисунок 27) или размера  $r - R_1$  для внутреннего сопряжения (Рисунок 28).

2. Проводим прямую  $n$ , параллельную заданной прямой  $m$  и удалённую от неё на расстояние, равное заданному радиусу дуги сопряжения  $r$ .

3. Построенная дуга пересекает прямую  $n$  в центре кривизны  $O_2$  дуги сопряжения.

3. Перпендикуляр к прямой  $m$  из центра кривизны  $O_2$  пересекает прямую  $m$  в точке сопряжения  $A$ .

4. Соединяем точки  $O_1$  и  $O_2$ . Отрезок  $O_1O_2$  пересекает окружность  $(O_1, R_1)$  в точке сопряжения  $B$ .

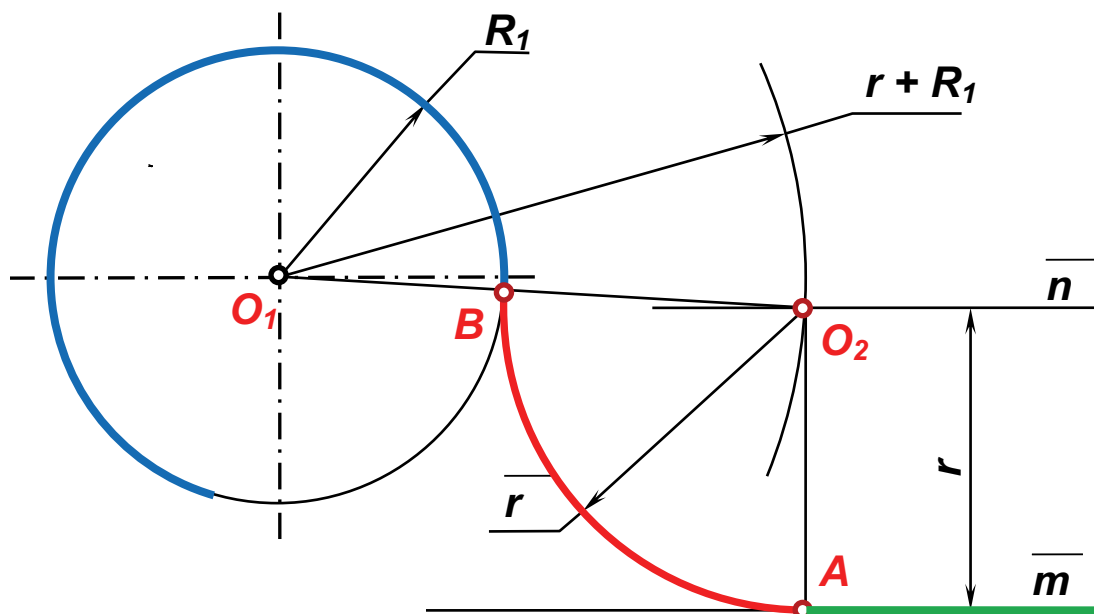


Рисунок 27 – Внешнее сопряжение дуги окружности и прямой дугой заданного радиуса

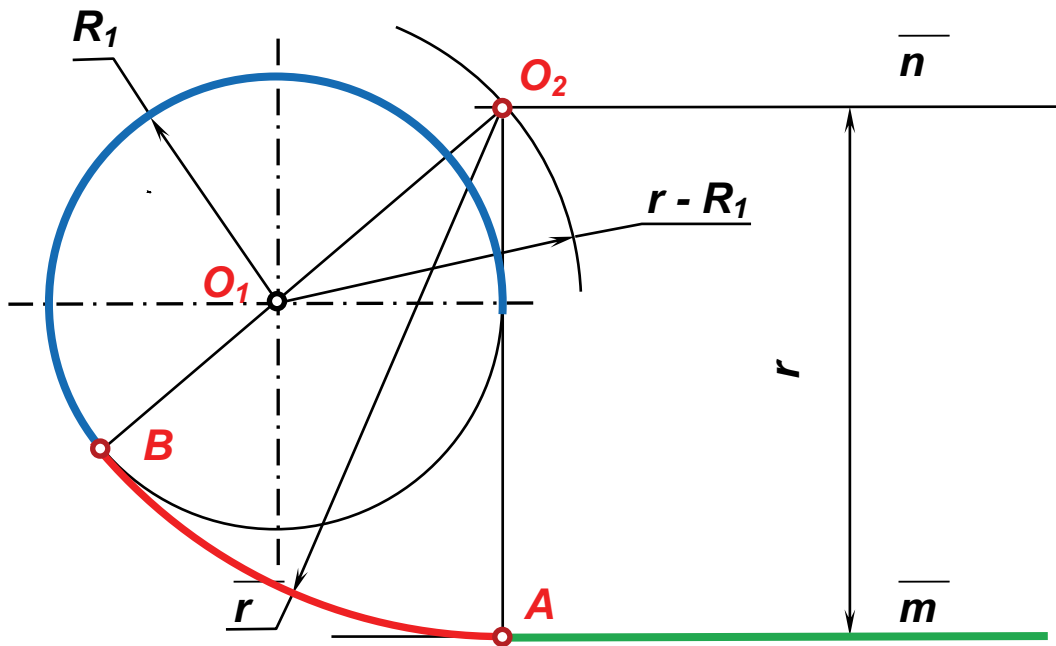


Рисунок 28 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и прямой дугой заданного радиуса

### 3.2. Сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке $A$ окружности

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ ,  $m$ ,  $(\cdot) \nabla$  окр.  $(O_1, R_1)$ .

Определить:

- точку сопряжения  $B$  на прямой;
- центр кривизны  $O_3$  дуги сопряжения.

Решение:

1. Проводим касательную к окружности в точке  $A$  перпендикулярно радиусу  $O_1A$ .

2. Строим биссектрису угла между заданной прямой и построенной касательной. Возможны 2 решения: биссектрису острого угла  $ABC$ , при этом получим внешнее сопряжение, или биссектрису тупого угла  $ABD$ . На примере, приведённом на рисунках 26 и 27 показано построение биссектрисы острого угла  $ABC$ , а на рисунках 28 и 29 построение биссектрисы тупого угла  $ABD$ . Для построения биссектрисы, т.е. деления угла пополам выполняем построение дуг окружностей одинакового радиуса  $r$  из точек  $1$  и  $2$  лежащих на сторонах угла и равноудалённых от его вершины  $B$ . Точка пересечения дуг  $E$  лежит на прямой, которая делит угол пополам - на биссектрисе угла.

3. Точка пересечения биссектрисы  $BE$  угла  $ABC$  и прямой, проходящей через центр окружности  $O_1$  и заданную точку сопряжения  $A$  является центром кривизны  $O_2$  дуги внешнего сопряжения (рис. 29,

рис 30). Точка пересечения биссектрисы  $BE$  угла  $ABD$  и прямой, проходящей через центр окружности  $O_1$  и заданную точку сопряжения  $A$  является центром кривизны  $O_2$  дуги внутреннего сопряжения (рис. 31, рис. 32). Точка сопряжения  $C$  на прямой является основанием перпендикуляра к прямой, проходящего через точку  $O_2$ .

4. Соединяем точки  $A$  и  $C$  дугой радиуса  $O_2A$  с центром в точке  $O_2$ . Возможны 2 варианта: дугу проводить по часовой стрелке от точки  $A$  – в результате получается сопряжение с направлением прямой влево от точки сопряжения  $C$  (рис. 30, рис. 31) и против часовой стрелки - в результате получается сопряжение с направлением прямой вправо от точки сопряжения  $A$  (рис. 29, рис. 32).

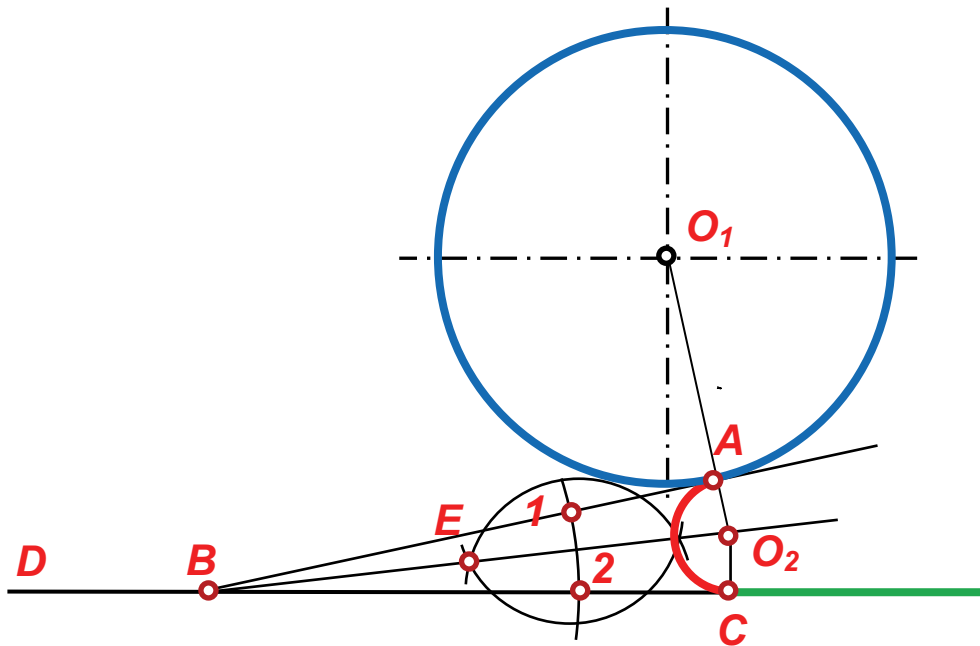


Рисунок 29 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой дугой против часовой стрелки от заданной точке  $A$  окружности

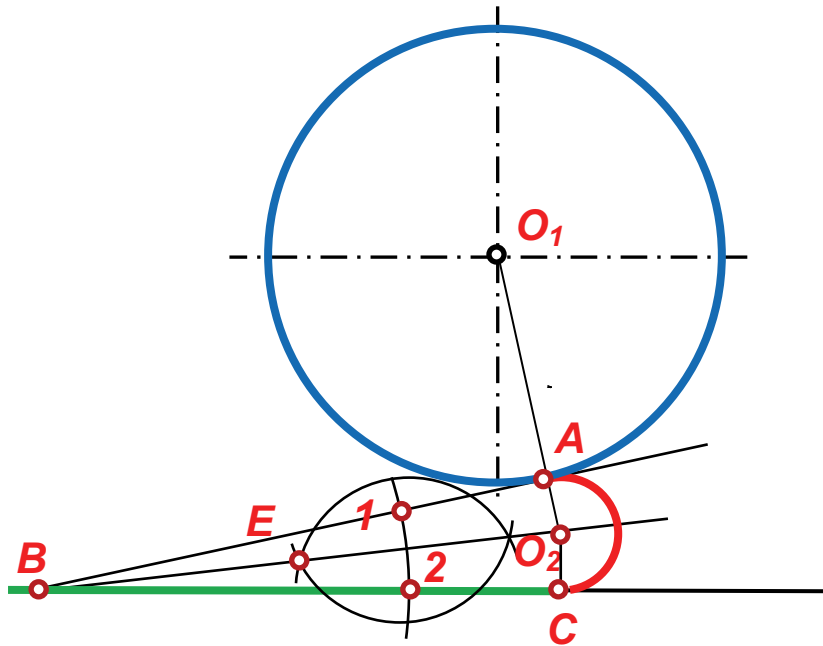


Рисунок 30 – Внешнее сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой по часовой стрелке от заданной точке  $A$  окружности

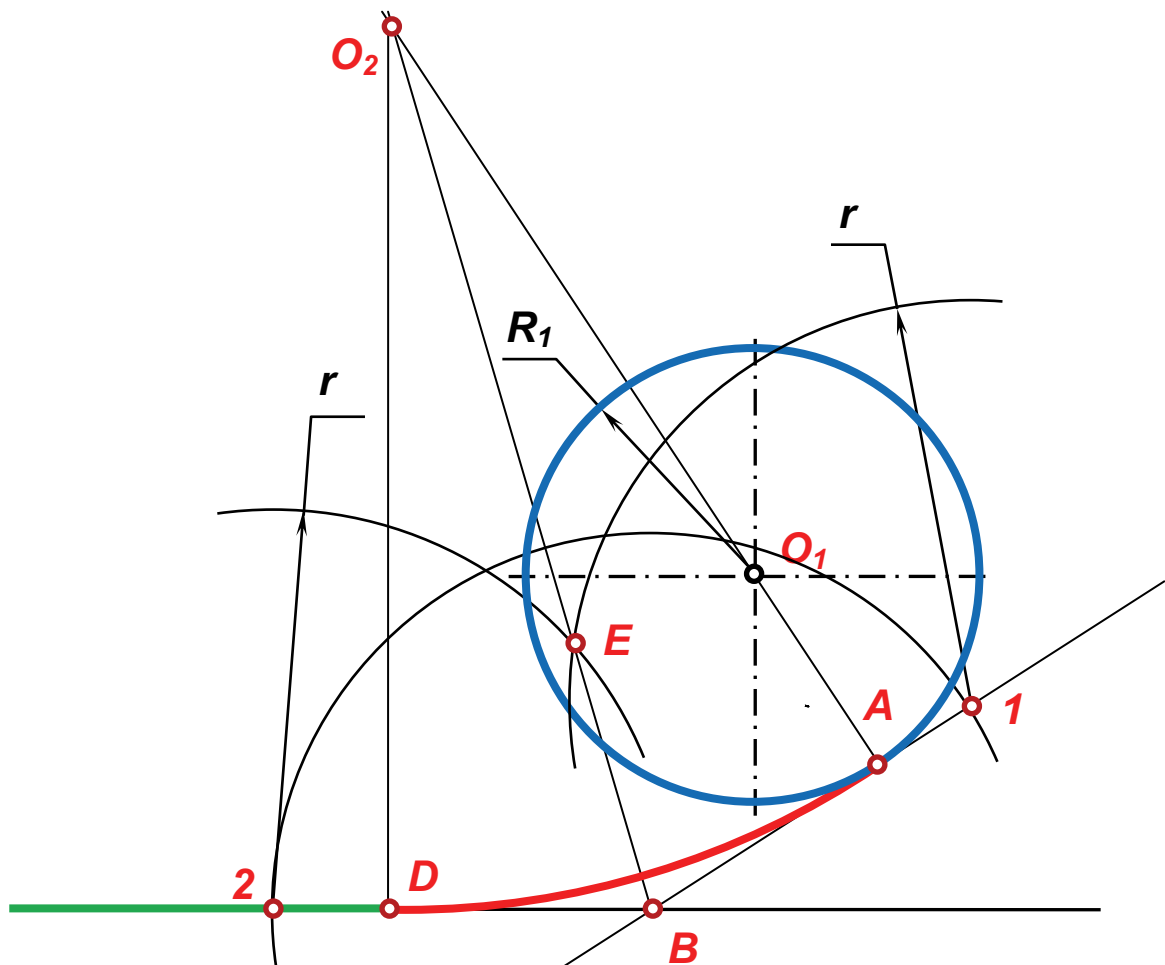


Рисунок 31 – Внутреннее сопряжение окружности и не пересекающей её прямой дугой по часовой стрелке от заданной точке  $A$  окружности

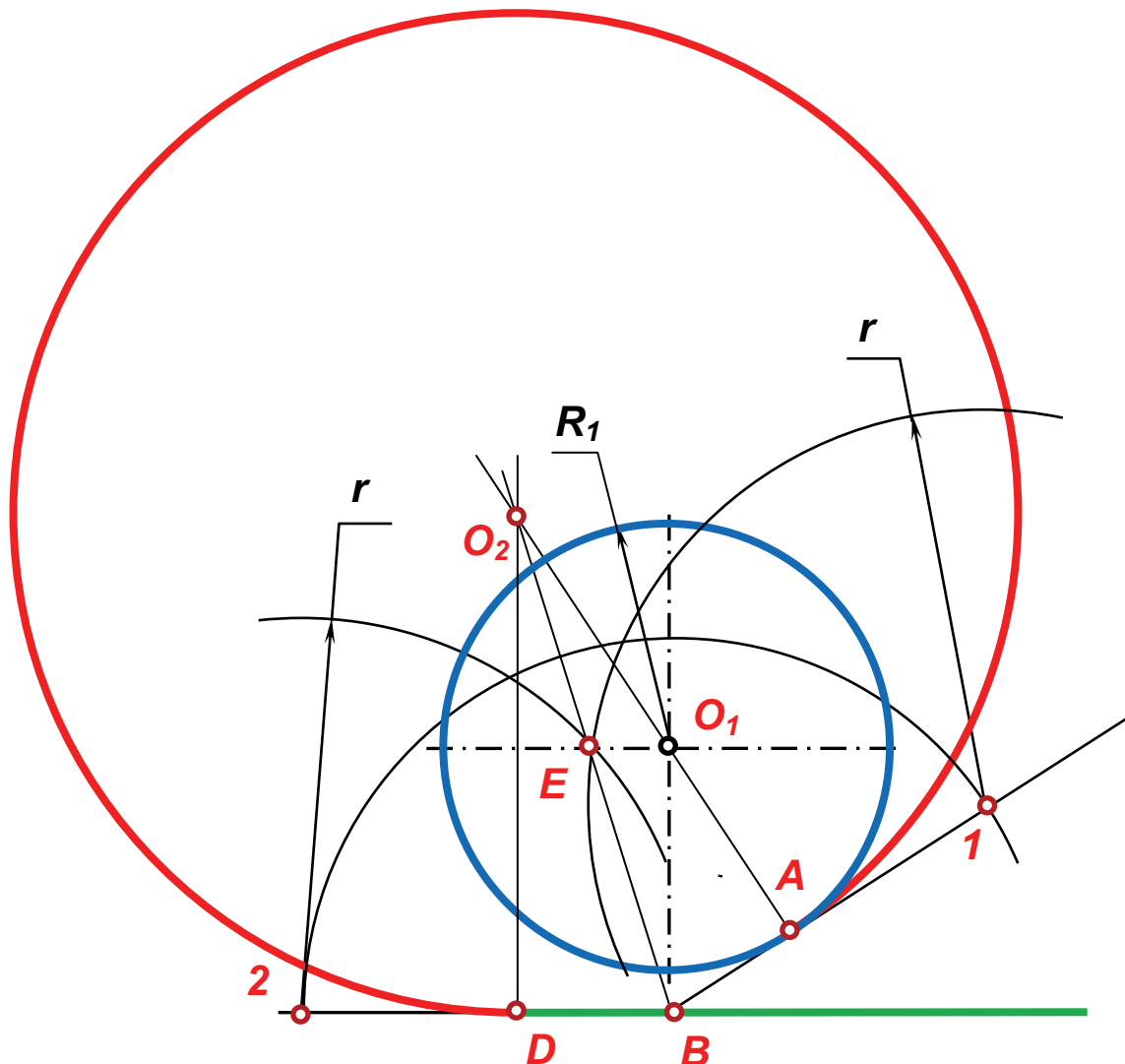


Рисунок 32 – Внешнее сопряжение окружности и не пересекающей её прямой дугой против часовой стрелки от заданной точки  $A$  окружности

### 3.3. Сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке $A$ окружности

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ ,  $m$ , ( $\notin A$  окр.  $(O_1, R_1)$ ).

Определить:

- точку сопряжения  $B$  на прямой;
- центр кривизны  $O_3$  дуги сопряжения.

Решение:

1. Проводим касательную к окружности в точке  $A$  перпендикулярно радиусу  $O_1A$ .

2. Строим биссектрису угла между заданной прямой и построенной касательной. Возможны 2 решения: биссектрису острого угла  $ABC$ , при этом получим внешнее сопряжение, или биссектрису тупого угла  $ABD$ . На примере, приведённом на рисунках 35 и 36 показано построение биссектрисы острого угла  $ABC$ , а на рисунках 33 и 34 построение биссектрисы тупого угла  $ABD$ . Для построения биссектрисы, т.е. деления угла пополам выполняем построение дуг окружностей одинакового радиуса  $r$  из точек  $1$  и  $2$  лежащих на сторонах угла и равноудалённых от его вершины  $B$ . Точка пересечения дуг  $E$  лежит на биссектрисе угла, т. е. на прямой, которая делит угол пополам.

3. Точка пересечения биссектрисы  $BE$  угла  $ABC$  и прямой, проходящей через центр окружности  $O_1$  и заданную точку сопряжения  $A$  является центром кривизны  $O_2$  дуги внешнего сопряжения (рис. 35, рис 36). Точка пересечения биссектрисы  $BE$  угла  $ABD$  и прямой, проходящей через центр окружности  $O_1$  и заданную точку сопряжения  $A$  является центром кривизны  $O_2$  дуги внутреннего сопряжения (рис. 33, рис. 34). Точка сопряжения  $C$  на прямой является основанием перпендикуляра к прямой, проходящего через точку  $O_2$ .

4. Соединяем точки  $A$  и  $C$  дугой радиуса  $O_2A$  с центром в точке  $O_2$ . Возможны 2 варианта: дугу проводить по часовой стрелке от точки  $A$  – в результате получается сопряжение с направлением прямой влево от точки сопряжения  $C$  (рис. 33, рис. 36) и против часовой стрелки - в результате получается сопряжение с направлением прямой вправо от точки сопряжения  $A$  (рис. 34, рис. 35).

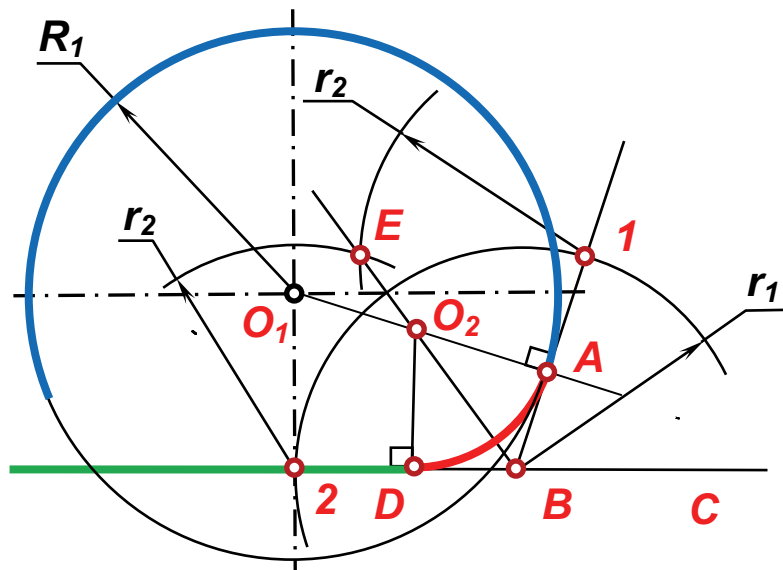


Рисунок 33 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  окружности

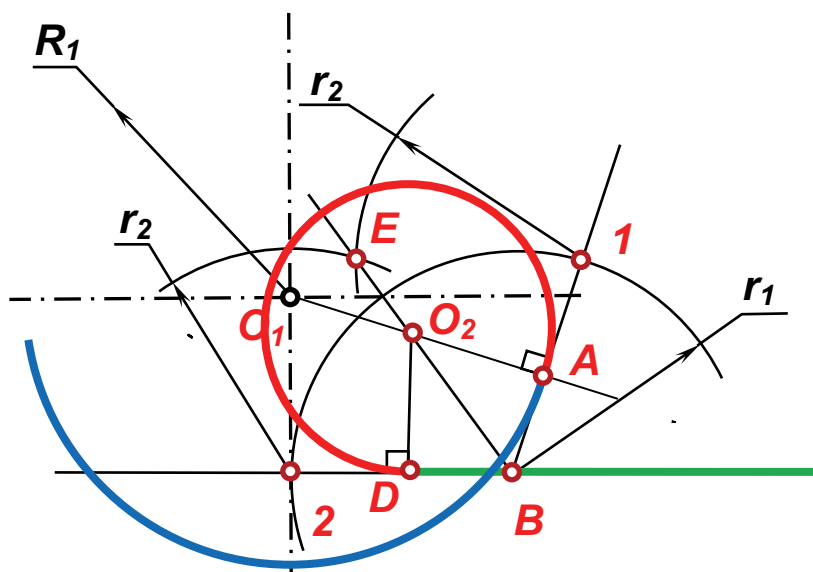


Рисунок 34 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  окружности

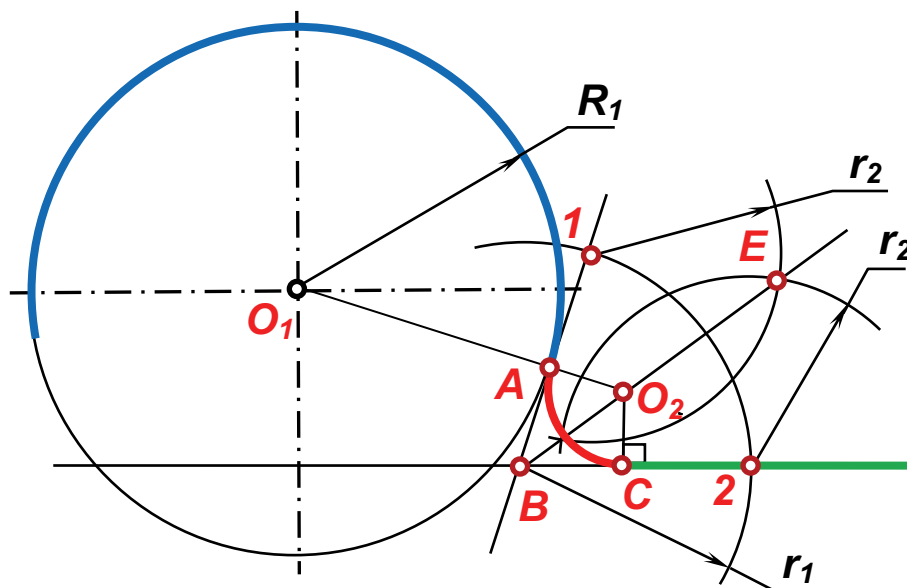


Рисунок 35 – Внешнее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  окружности

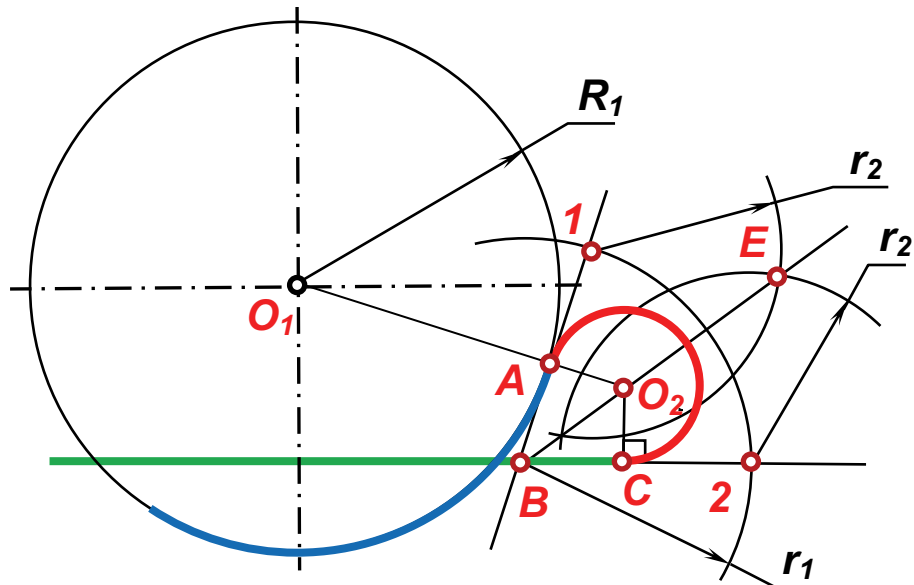


Рисунок 36 – Внешнее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  окружности

### 3.4. Сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке $A$ прямой

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , пр.  $a$ , ( $\notin A$  пр.  $a$ )

Определить:

- точку сопряжения  $B$  на окружности  $(O_1, R_1)$ ;
- центр кривизны дуги сопряжения.

Решение:

1. Проводим перпендикуляр к прямой из центра окружности  $O_1$  до пересечения с окружностью в точке  $C$ . Перпендикуляр пересекает окружность в двух точках, поэтому возможны два решения:

– точка  $C$  и прямая лежат по разные стороны от центра  $O_1$  окружности – в ходе решения получим внешнее сопряжения для окружности (рис.37, рис.38);

– точка  $C$  и прямая лежат по одну сторону от центра  $O_1$  окружности – в ходе решения получим внутреннее сопряжения для окружности (рис.39, рис.40).

2. Через точки  $A$  и  $C$  проводим прямую до пересечения с окружностью в точке  $B$ , являющейся точкой сопряжения на окружности.

3. В заданной точке сопряжения  $A$  восстанавливаем перпендикуляр к прямой.

4. Отрезок  $BO_1$  пересекает данный перпендикуляр в точке  $O_2$ , являющейся центром кривизны дуги сопряжения. Дугу сопряжения можно строить в двух направлениях: по часовой стрелке от заданной точки  $A$  (рис. 38, 39) и против часовой стрелки от точки  $A$  (рис.37, 40).

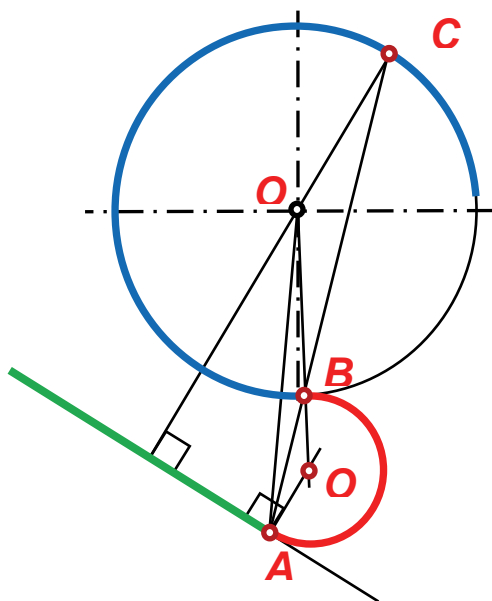


Рисунок 37 – Внешнее сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  прямой

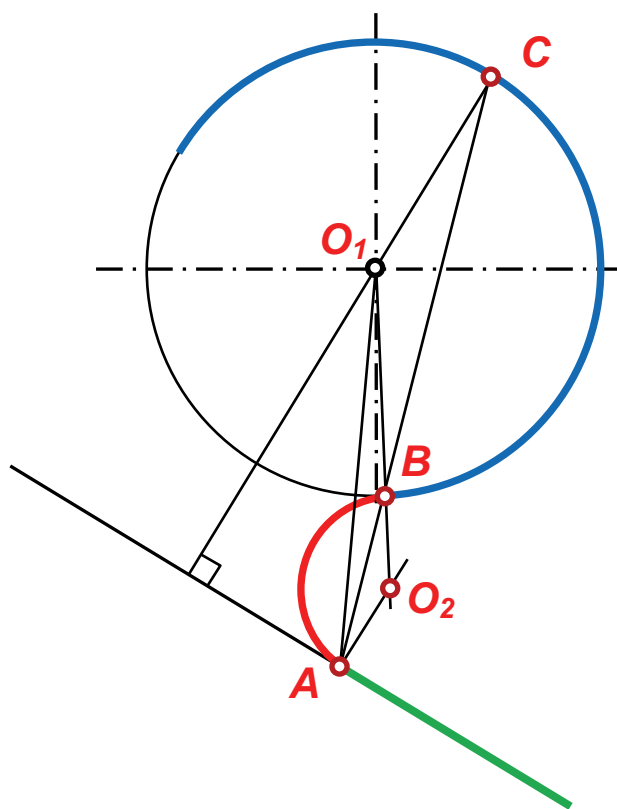


Рисунок 38 – Внешнее сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  прямой

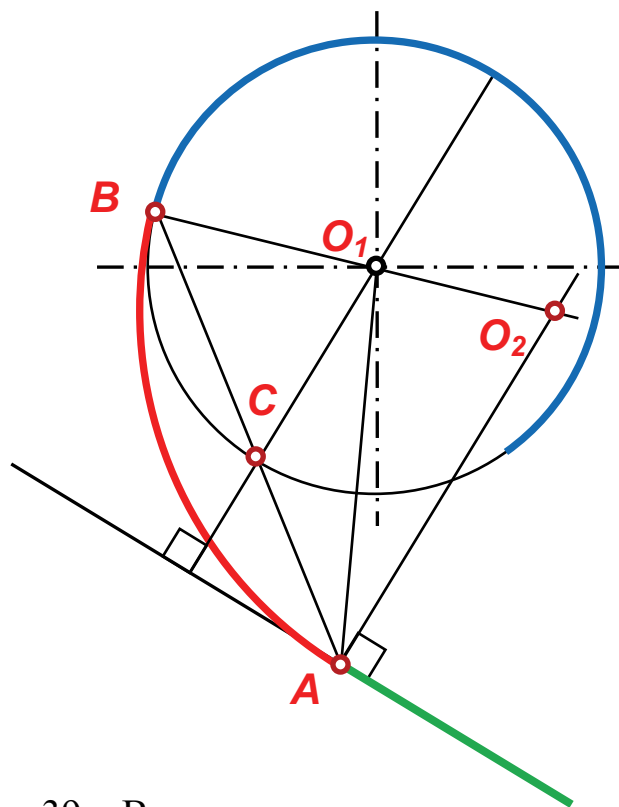


Рисунок 39 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  прямой

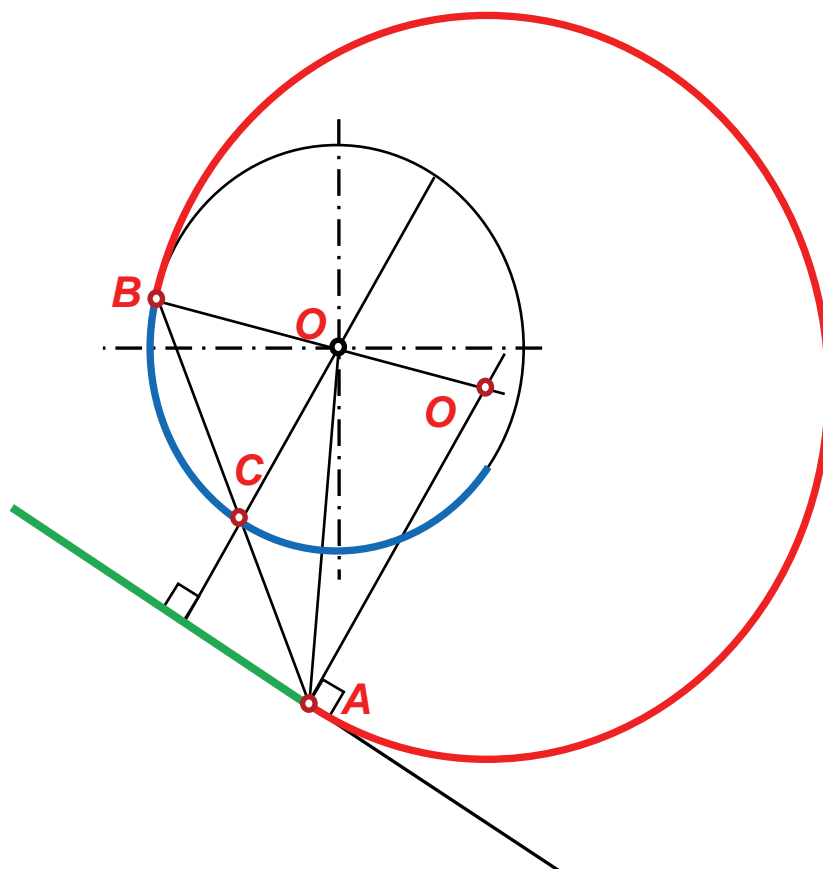


Рисунок 40 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке  $A$  прямой

### 3.5. Сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке $A$ прямой

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , пр.  $a$ , ( $\notin A$  пр.  $a$ )

Определить:

- точку сопряжения  $B$  на окружности  $(O_1, R_1)$ ;
- центр кривизны дуги сопряжения.

Решение:

1. Проводим перпендикуляр к прямой из центра окружности  $O_1$  до пересечения с окружностью в точке  $C$ . Перпендикуляр пересекает окружность в двух точках, поэтому возможны два решения:

– точка  $C$  и прямая лежат по одну сторону от центра  $O_1$  окружности – ходе построения получим внутреннее сопряжения для окружности (рис.41, рис.42);

– точка  $C$  и прямая лежат по разные стороны от центра  $O_1$  окружности – ходе построения получим внутреннее сопряжения для окружности (рис.43, рис.44).

2. Через точки  $A$  и  $C$  проводим прямую до пересечения с окружностью в точке  $B$ , являющейся точкой сопряжения на окружности.

3. В заданной точке сопряжения  $A$  восстанавливаем перпендикуляр к прямой.

4. Отрезок  $BO_1$  пересекает данный перпендикуляр в точке  $O_2$ , являющейся центром кривизны дуги сопряжения.

5. Дугу сопряжения можно строить в двух направлениях: по часовой стрелке от заданной точки  $A$  (рис. 41, 43) и против часовой стрелки от точки  $A$  (рис. 42, 44).

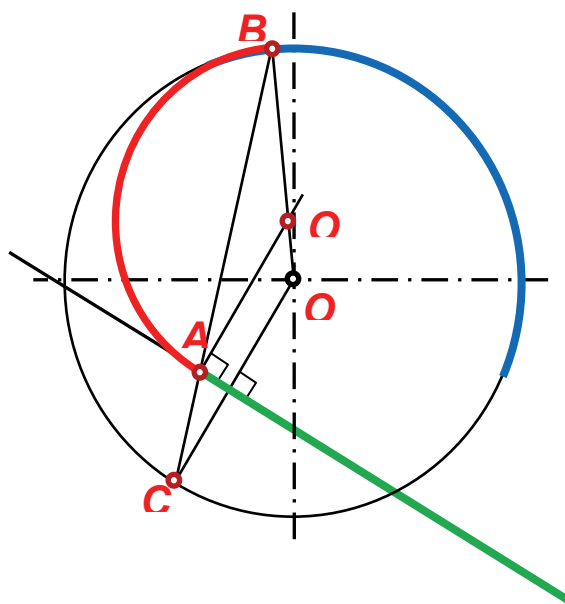


Рисунок 41 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой по часовой стрелке от заданной точке  $A$  прямой

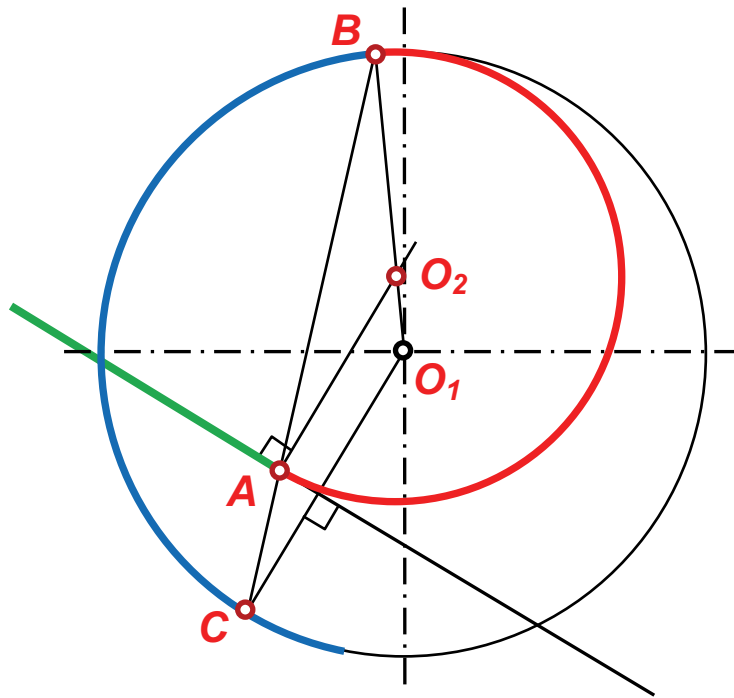


Рисунок 42 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой против часовой стрелки от заданной точке  $A$  прямой

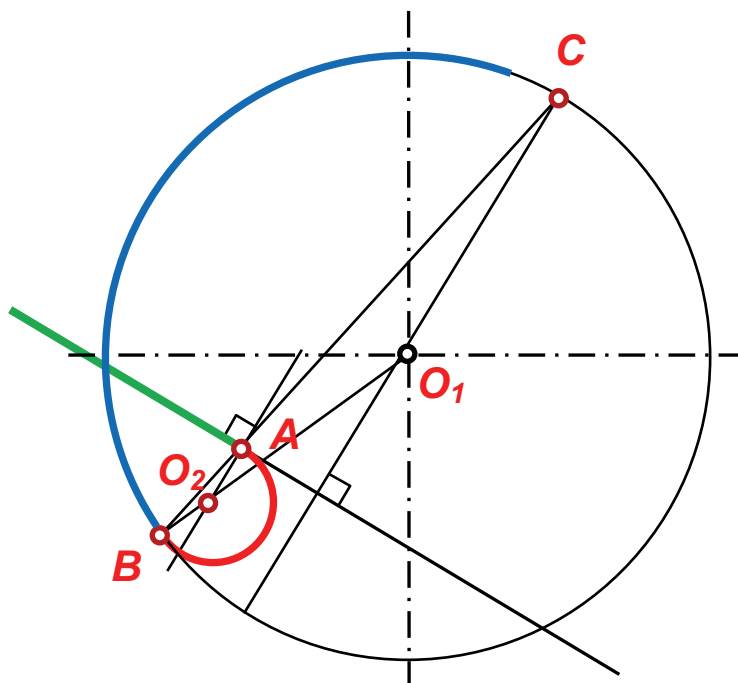


Рисунок 43 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой по часовой стрелке от заданной точке  $A$  прямой

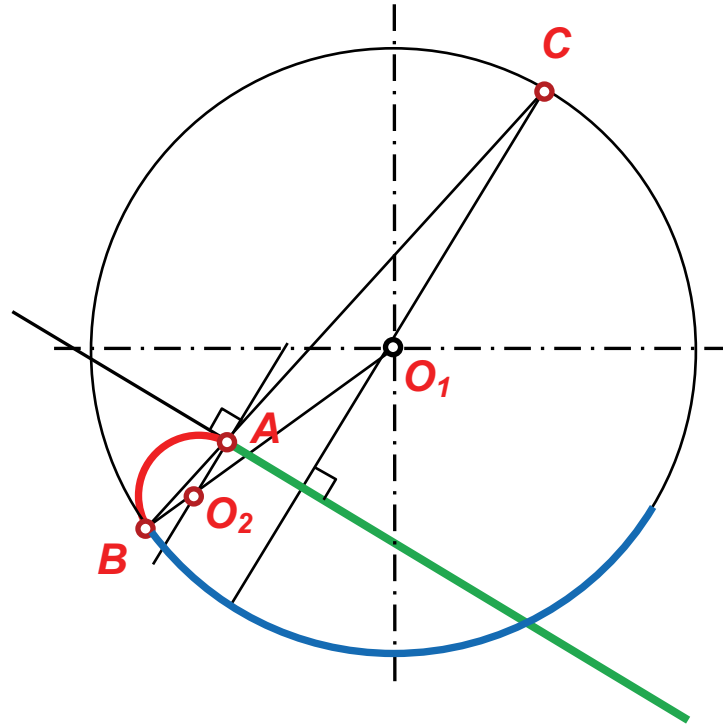


Рисунок 44 – Внутреннее сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой против часовой стрелки от заданной точке  $A$

## 4. СОПРЯЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ ДУГОЙ ЗАДАННОГО РАЗМЕРА

### 4.1. Внешнее сопряжение окружностей дугой заданного размера

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , окр.  $(O_2, R_2)$ ,  $r$ .

Определить:

- точки сопряжения  $A$  и  $B$  на окружностях;
- центр кривизны  $O_3$  дуги сопряжения.

Решение:

1. Строим из центра окружности  $O_1$  дугу размера  $R_1+r$ , а из центра  $O_2$  - дугу размера  $R_2+r$ .

2. Построенные дуги пересекаются в центре кривизны дуги сопряжения  $O_3$ .

3. Соединяем точки  $O_3$  и  $O_1$ . Отрезок  $O_3O_1$  пересекает окружность  $(O_1, R_1)$  в точке сопряжения  $A$ .

4. Соединяем точки  $O_3$  и  $O_2$ . Отрезок  $O_3O_2$  пересекает окружность  $(O_2, R_2)$  в точке сопряжения  $B$ .

5. Из центра кривизны дуги сопряжения  $O_3$  проводим дугу сопряжения радиусом  $r = IO_3AI$ . Дуга может быть проведена по часовой стрелке от точки сопряжения  $A$  (рис. 45), или против часовой стрелки (рис. 46).

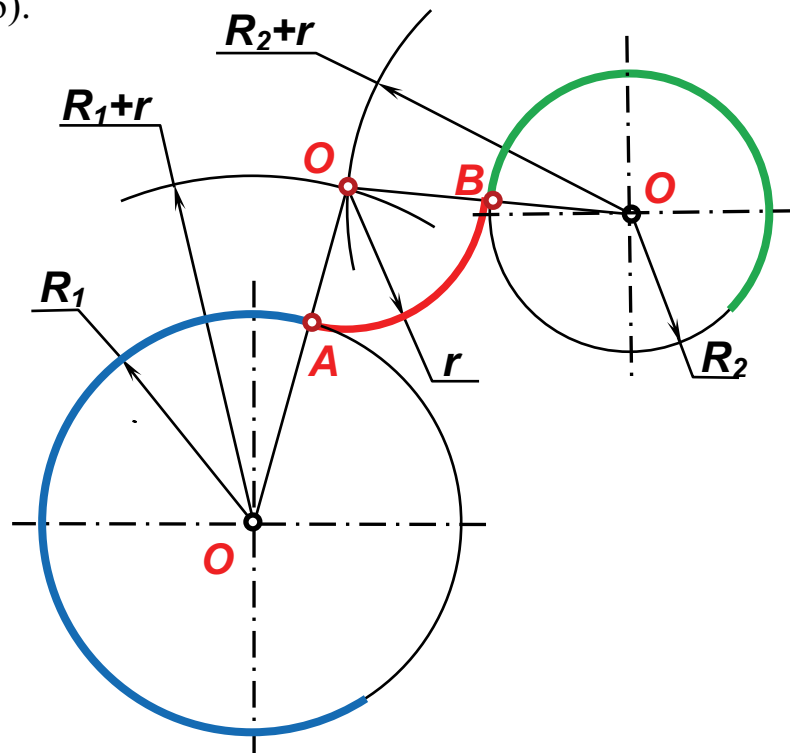


Рисунок 45 – Внешнее сопряжение окружностей дугой заданного размера

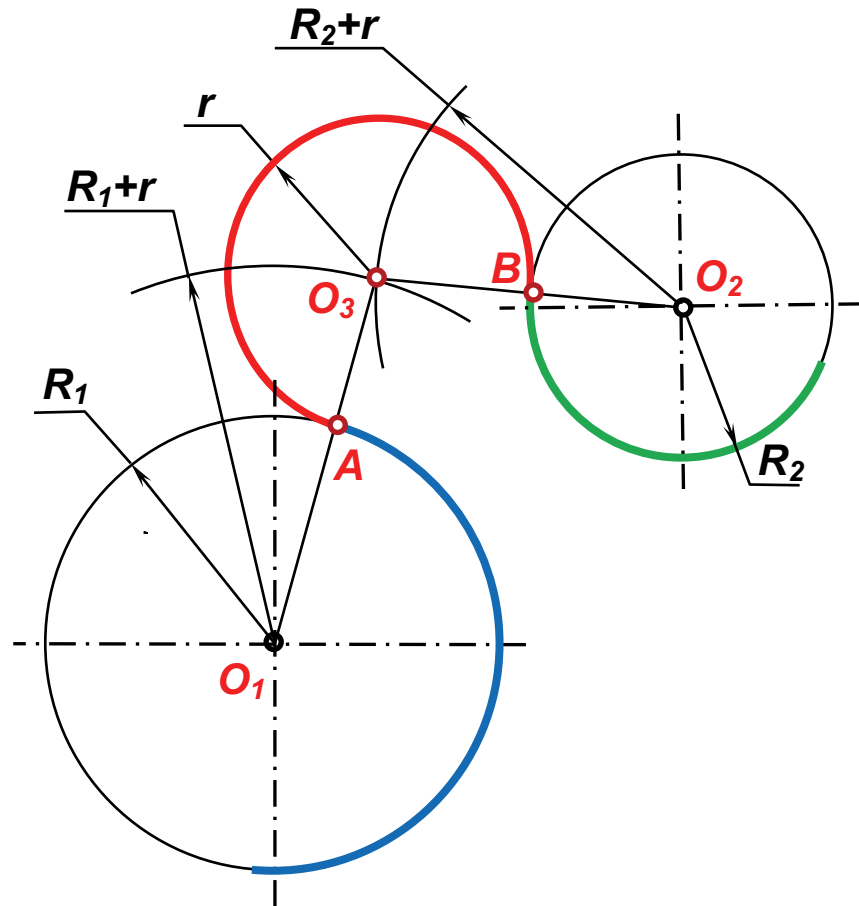


Рисунок 46 – Внешнее сопряжение окружностей дугой заданного размера

#### 4.2. Внутреннее сопряжение окружностей дугой заданного размера

**Дано:** Окр.  $(O_1, R_1)$ , окр.  $(O_2, R_2)$ ,  $r$ .

**Определить:**

- точки сопряжения  $A$  и  $B$  на окружностях;
- центр кривизны  $O_3$  дуги сопряжения.

**Решение:**

1. Строим из центра окружности  $O_1$  дугу размера  $r - R_1$ , а из центра  $O_2$  - дугу размера  $r - R_2$ .

2. Построенные дуги пересекаются в центре кривизны дуги сопряжения  $O_3$ .

3. Соединяем точки  $O_3$  и  $O_1$ . Отрезок  $O_3O_1$  пересекает окружность  $(O_1, R_1)$  в точке сопряжения  $A$ .

4. Соединяем точки  $O_3$  и  $O_2$ . Отрезок  $O_3O_2$  пересекает окружность  $(O_2, R_2)$  в точке сопряжения  $B$ .

5. Из центра кривизны дуги сопряжения  $O_3$  проводим дугу сопряжения радиусом  $r = IO_3AI$ . Дуга может быть проведена по часовой стрелке от точки сопряжения  $A$  (рис. 47), или против часовой стрелки (рис. 48).

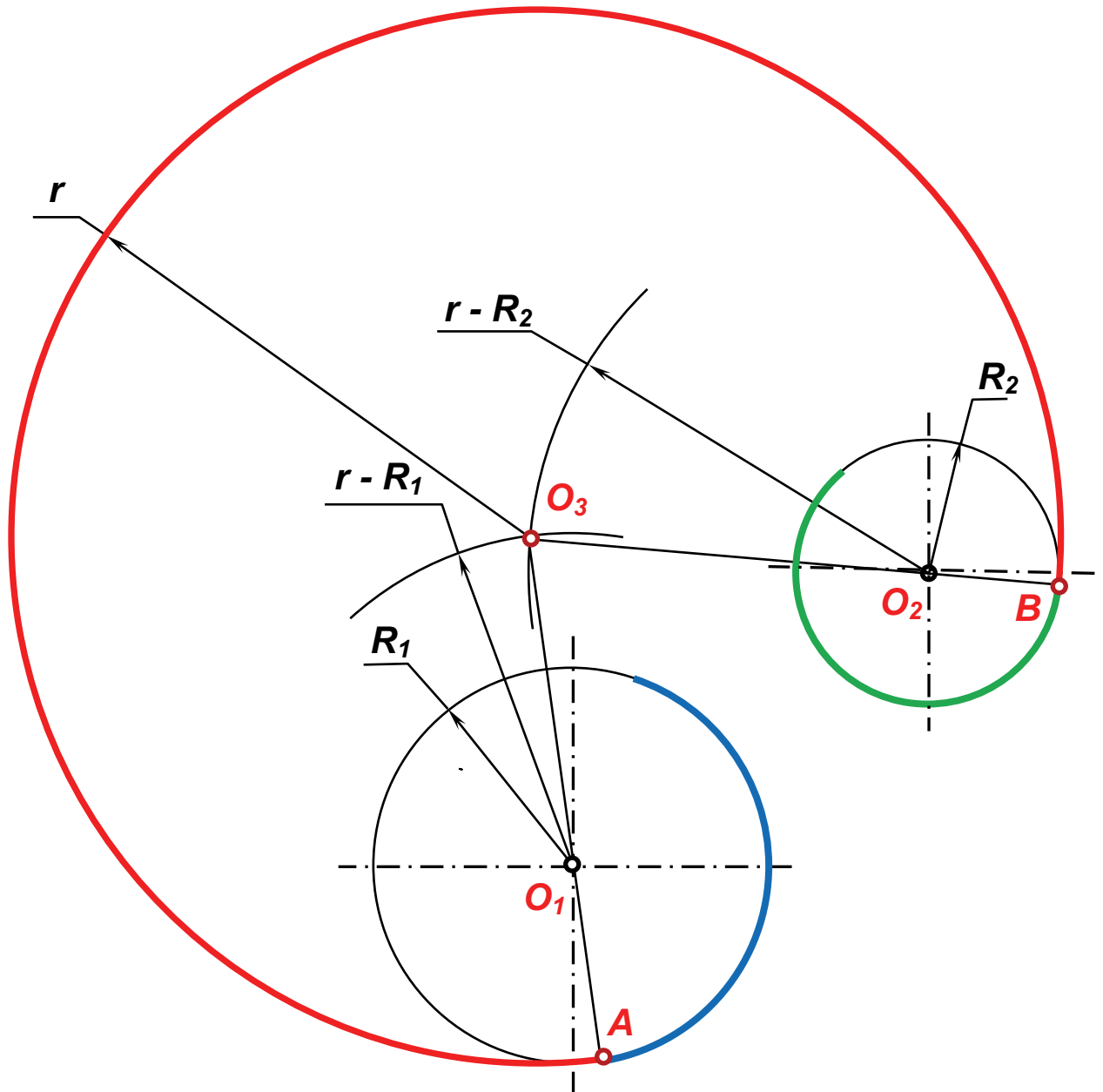


Рисунок 47 – Внутреннее сопряжение окружностей дугой заданного размера

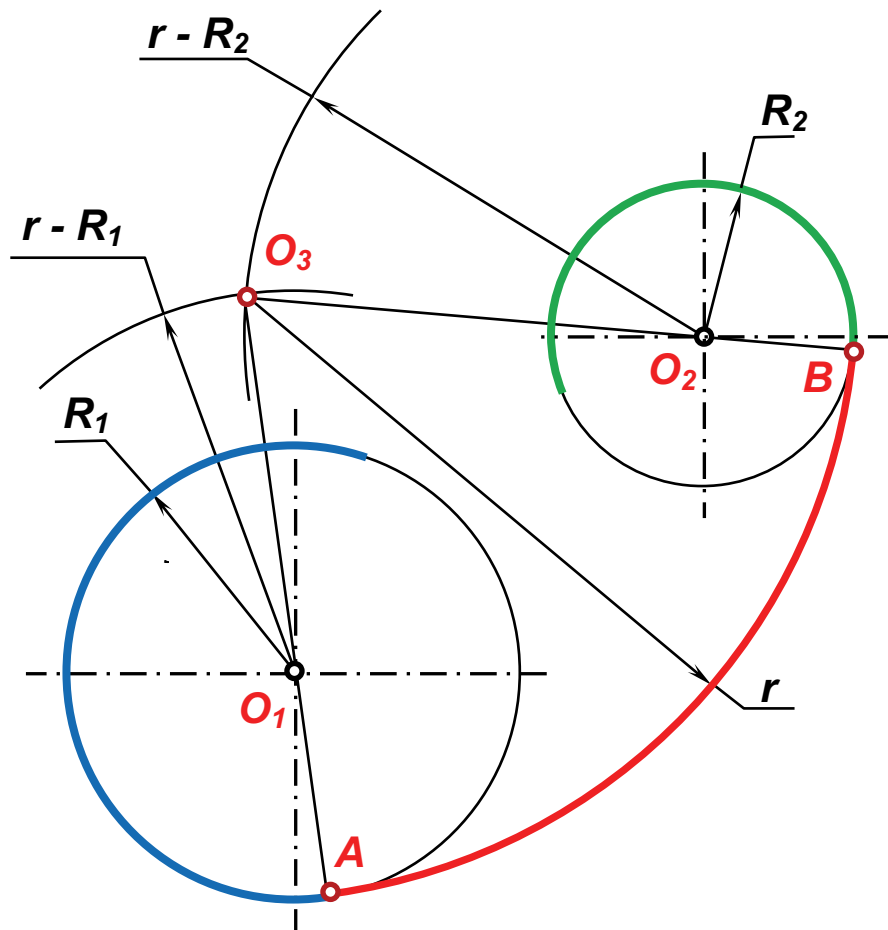


Рисунок 48 – Внутреннее сопряжение окружностей дугой заданного размера

#### 4.3. Смешанное сопряжение окружностей дугой заданного размера

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , окр.  $(O_2, R_2)$ ,  $r$ .

Определить:

- точки сопряжения  $A$  и  $B$  на окружностях;
- центр кривизны  $O_3$  дуги сопряжения.

Решение:

1. Строим из центра окружности  $O_1$  дугу размера  $r + R_1$ , а из центра  $O_2$  - дугу размера  $r - R_2$ .

2. Построенные дуги пересекаются в центре кривизны дуги сопряжения  $O_3$ .

3. Соединяем точки  $O_3$  и  $O_1$ . Отрезок  $O_3 O_1$  пересекает окружность  $(O_1, R_1)$  в точке сопряжения  $A$ .

4. Соединяем точки  $O_3$  и  $O_2$ . Отрезок  $O_3 O_2$  продолжаем до пересечения окружность  $(O_2, R_2)$  в точке сопряжения  $B$ .

5. Из центра кривизны дуги сопряжения  $O_3$  проводим дугу сопряжения радиусом  $r = IO_3AI$ . Дуга может быть проведена по часо-

вой стрелке от точки сопряжения  $A$  (рис. 49), или против часовой стрелки (рис. 50).

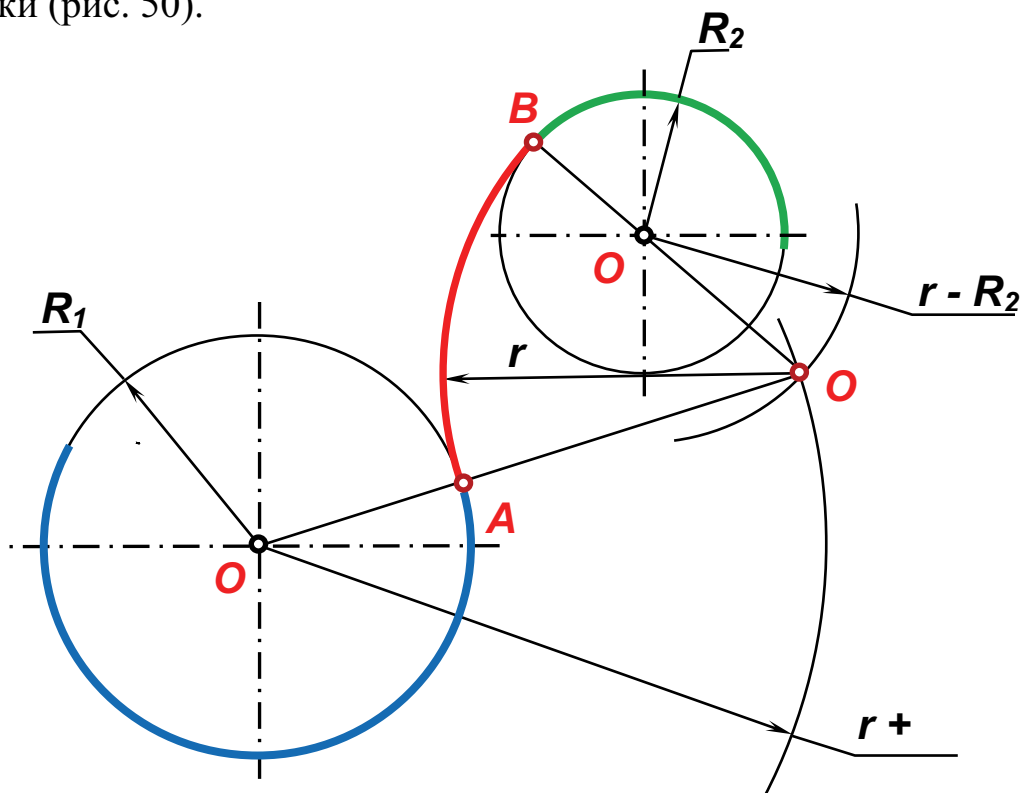


Рисунок 49 – Смешанное сопряжение окружностей дугой заданного размера

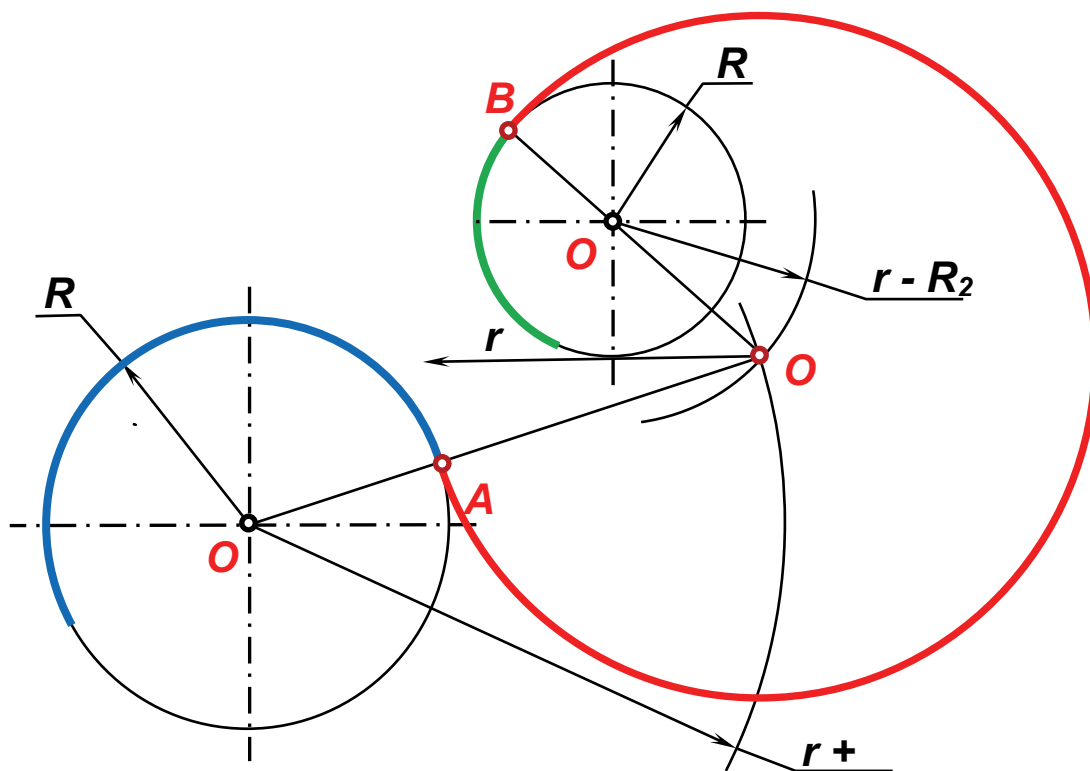


Рисунок 50 – Смешанное сопряжение окружностей дугой заданного размера

#### 4.4. Примеры смешанных сопряжений дугой заданного размера пересекающихся окружностей

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , окр.  $(O_2, R_2)$ ,  $r$ .

**Определить:**

- точки сопряжения  $A$  и  $B$  на окружностях;
- центр кривизны  $O_3$  дуги сопряжения.

**Решение(1-2 варианты):**

1. Строим из центра окружности  $O_1$  дугу размера  $R_1 - r$ , а из центра  $O_2$  - дугу размера  $R_2 + r$  (рис. 51, 52).

2. Построенные дуги пересекаются в центрах кривизны дуг сопряжения  $O_3$  и  $O_4$ .

3. Соединяем точку  $O_1$  с точками  $O_3$  и  $O_4$  и продолжаем отрезки  $O_1O_3$  и  $O_1O_4$  до пересечения с окружностью  $(O_1, R_1)$  в точках сопряжения  $B_1$  и  $B_2$  соответственно.

4. Соединяем точку  $O_2$  с точками  $O_3$  и  $O_4$ . Отрезки  $O_2O_3$  и  $O_2O_4$  пересекают окружность  $(O_2, R_2)$  в точках сопряжения  $A_1$  и  $A_2$ .

5. Из центров кривизны дуг сопряжения  $O_3$  и  $O_4$  проводим дуги сопряжения заданным радиусом  $r = IO_3A_1I = IO_3B_1I = IO_4A_2I = IO_4B_2I$ . Дуги могут быть проведены в разных направлениях от точек сопряжения - по часовой стрелке или против часовой стрелки и будут получены различные варианты решений (рис. 51, а, б).

6. Если при определении центров кривизны дуг сопряжения мы строим из центра окружности  $O_1$  дугу размера  $R_1 + r$ , а из центра  $O_2$  - дугу размера  $R_2 - r$ , то получаем при дальнейших аналогичных построениях ещё два возможных сопряжения данных окружностей дугой заданного размера – **3 и 4 варианты** решения (рис. 51 в, г).

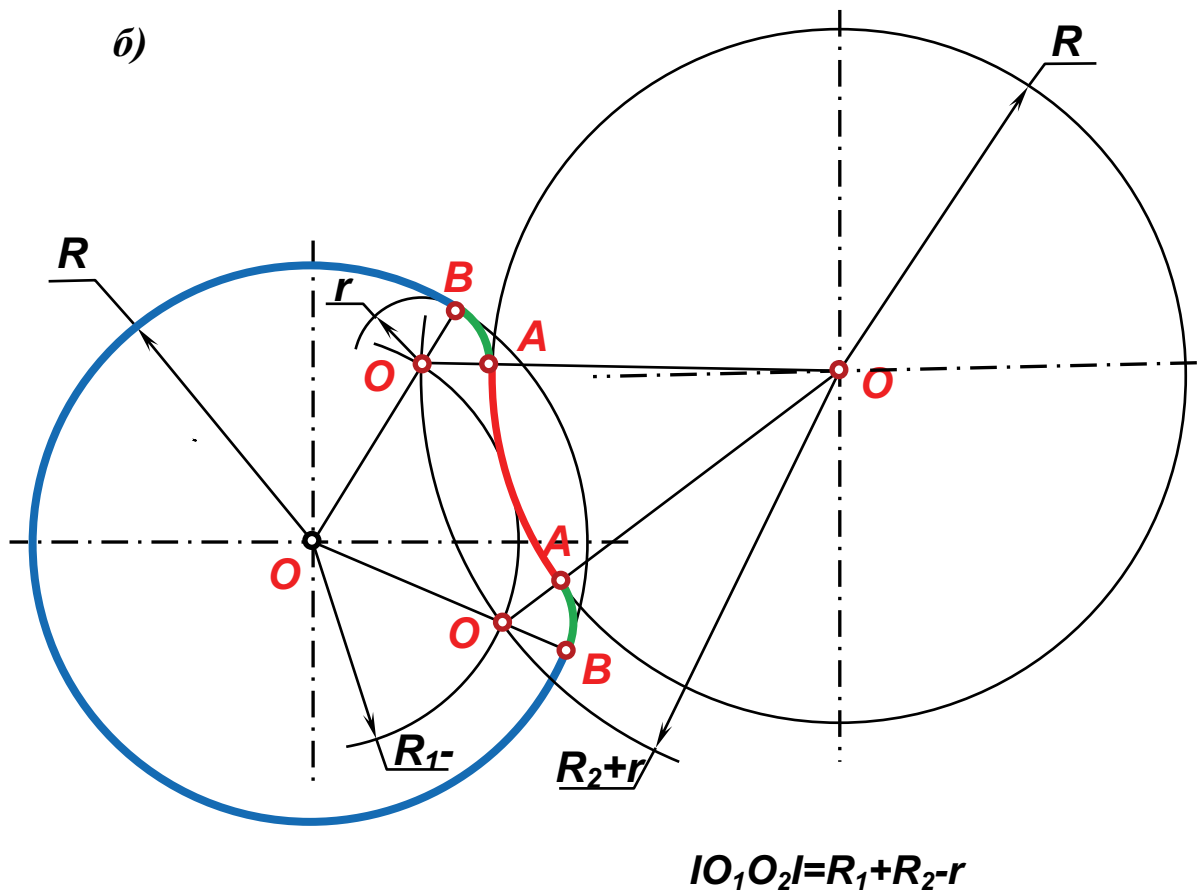
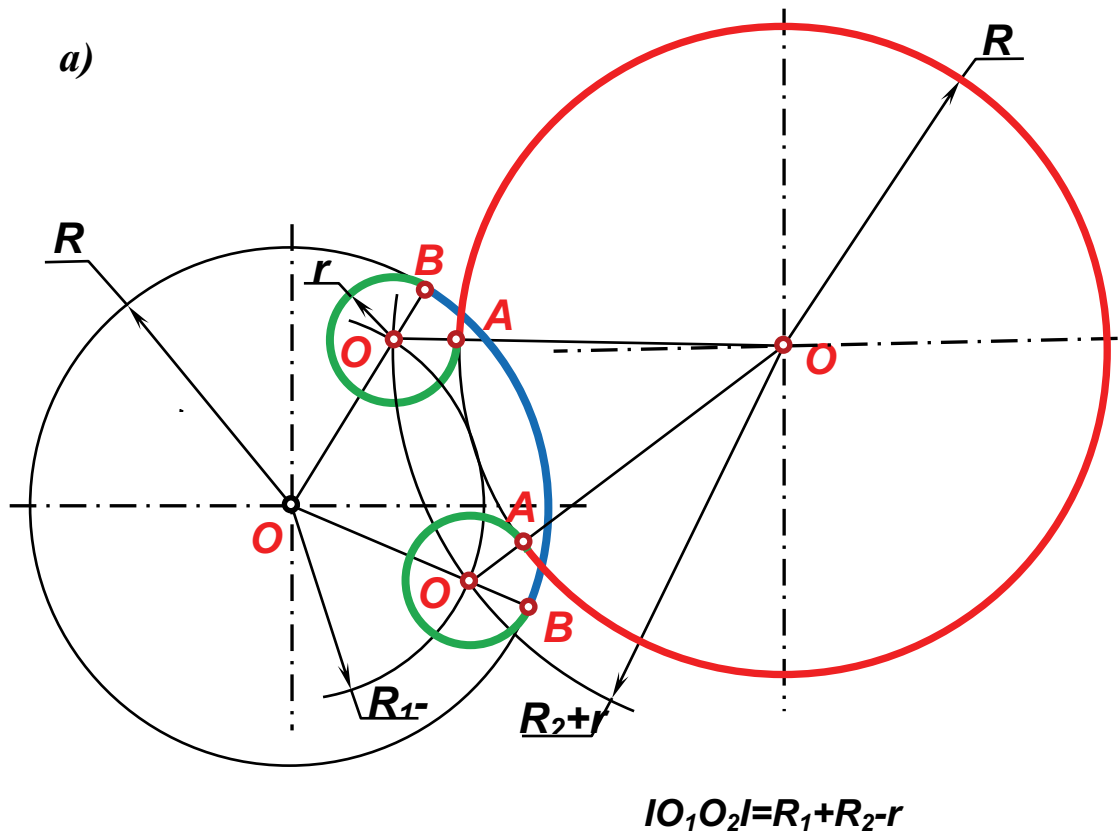
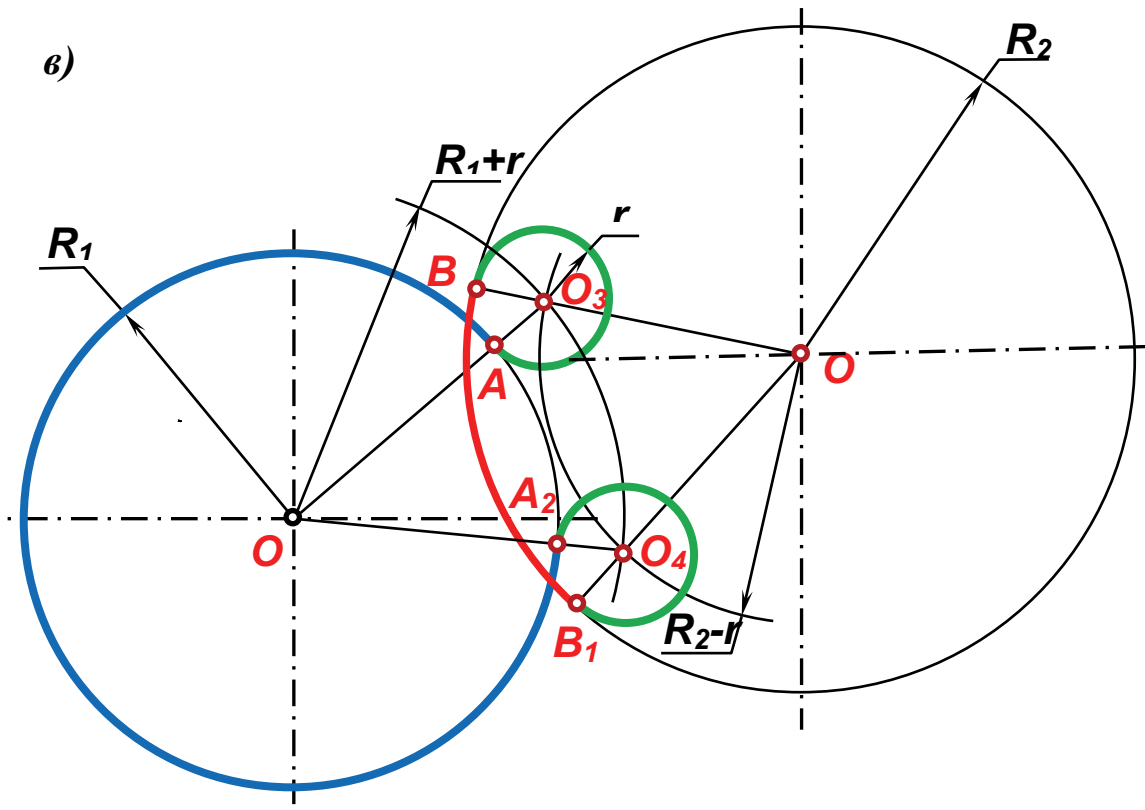
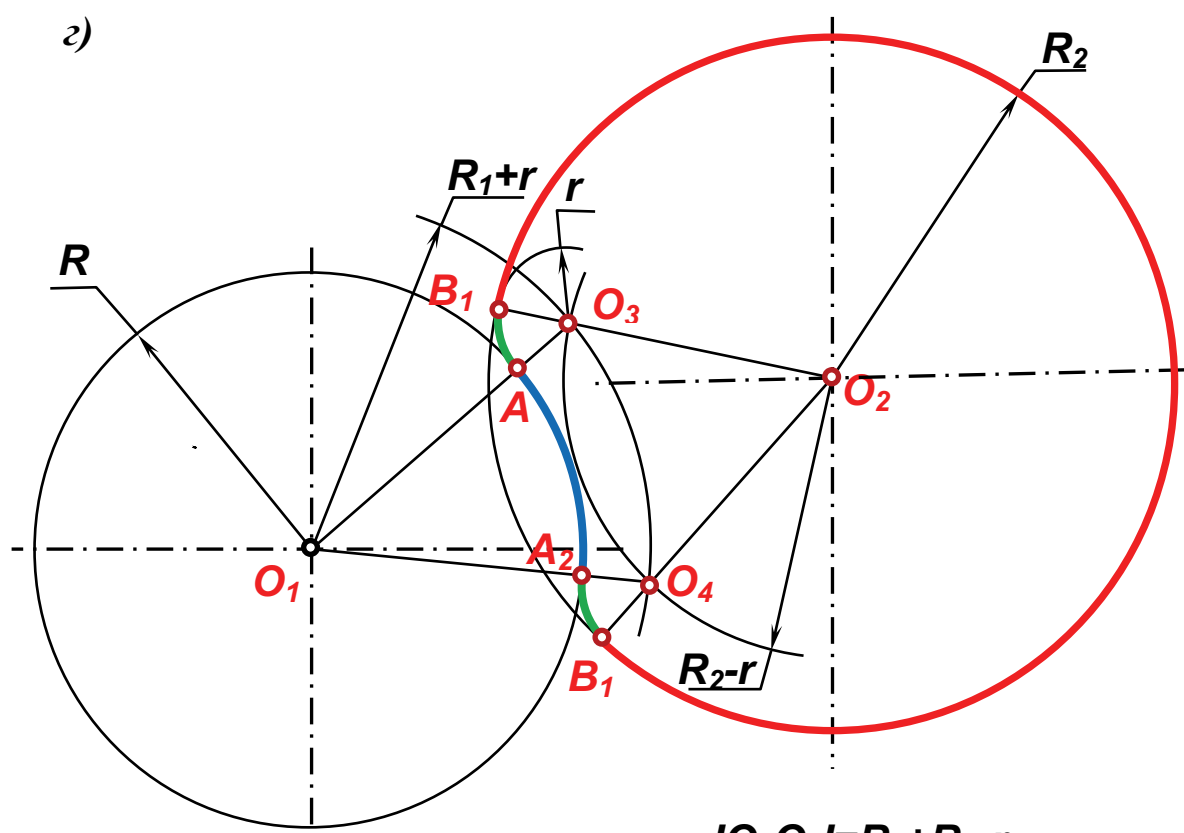


Рисунок 51 – Примеры смешанных сопряжений пересекающихся окружностей дугой заданного размера



$$|O_1O_2| = R_1 + R_2 - r$$



$$|O_1O_2| = R_1 + R_2 - r$$

Рисунок 51 (Продолжение) – Примеры смешанных сопряжений пересекающихся окружностей дугой заданного размера

## 5. СОПРЯЖЕНИЕ ДУГ ОКРУЖНОСТЕЙ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ $A$ ОКРУЖНОСТИ

Дано: Окр.  $(O_1, R_1)$ , окр.  $(O_2, R_2)$ ,  $(A) \in \text{окр. } (O_1, R_1)$ .

**Определить:**

- точку сопряжения  $B$  на окружности  $(O_2, R_2)$ ;
- центр кривизны дуги сопряжения.

**Решение:**

1. Строим касательную к заданной окружности в заданной точке  $A$  перпендикулярно радиусу  $O_1A$ .

2. Восстанавливаем перпендикуляр из центра  $O_2$  второй окружности к построенной касательной. Перпендикуляр пересекает окружность  $(O_2, R_2)$  в точке  $C$ . Возможны два варианта:

- точка  $C$  и касательная расположены по разные стороны от точки  $O_2$  (рис.52, а,б). В данном случае получим внешнее сопряжение для обеих окружностей;

- точка  $C$  и касательная расположены по одну сторону от точки  $O_2$  (рис.53, а,б). В данном случае получим смешанное сопряжение – для одной из окружностей будет внутренним, а для второй окружности – внешним;

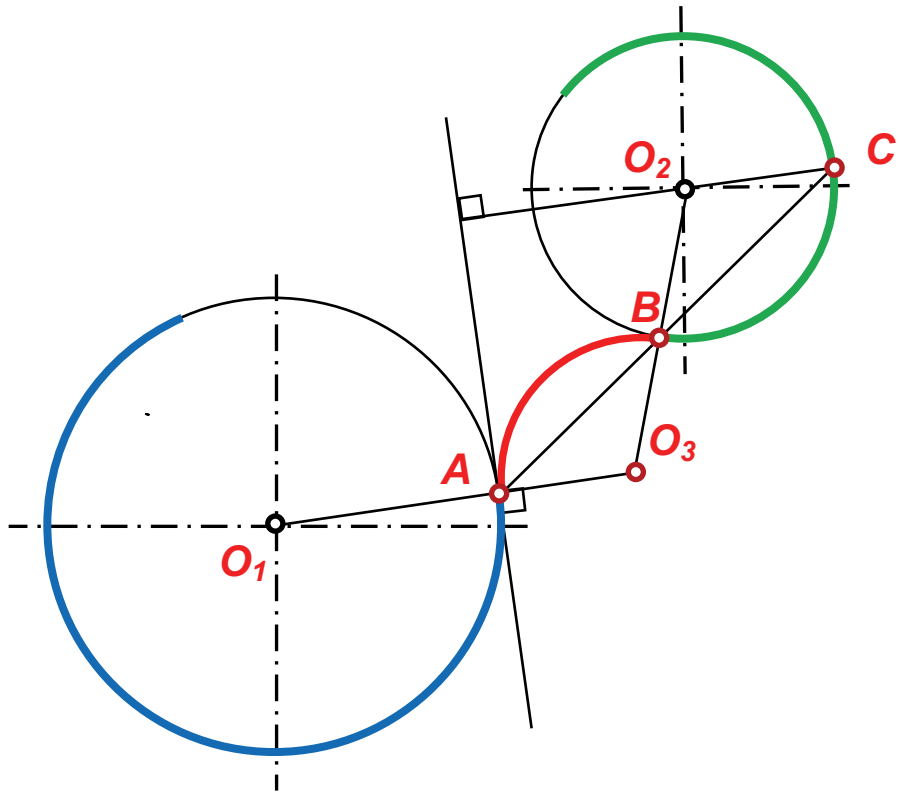
3. Соединяем точки  $A$  и  $C$ . Отрезок  $AB$  пересекает окружность в точке  $B$ . Прямая  $O_2B$  пересекает прямую  $O_1A$  в точке  $O_3$ , являющейся центром кривизны дуги сопряжения.

5. Из центра кривизны дуги сопряжения  $O_3$  проводим дугу сопряжения радиусом  $r = IO_3AI$ . Дуга может быть проведена по часовой стрелке от точки сопряжения  $A$  (рис. 52а, 53а), или против часовой стрелки (рис. 52б, 53б).

Алгоритм решения одинаков для любых сочетаний положений и размеров окружностей.

На рисунках 51-56 приведены примеры сопряжения дуг окружностей с расстоянием между центрами, большими суммы радиусов окружностей, т.е. сопрягаемые окружности не пересекаются.

a)



б)

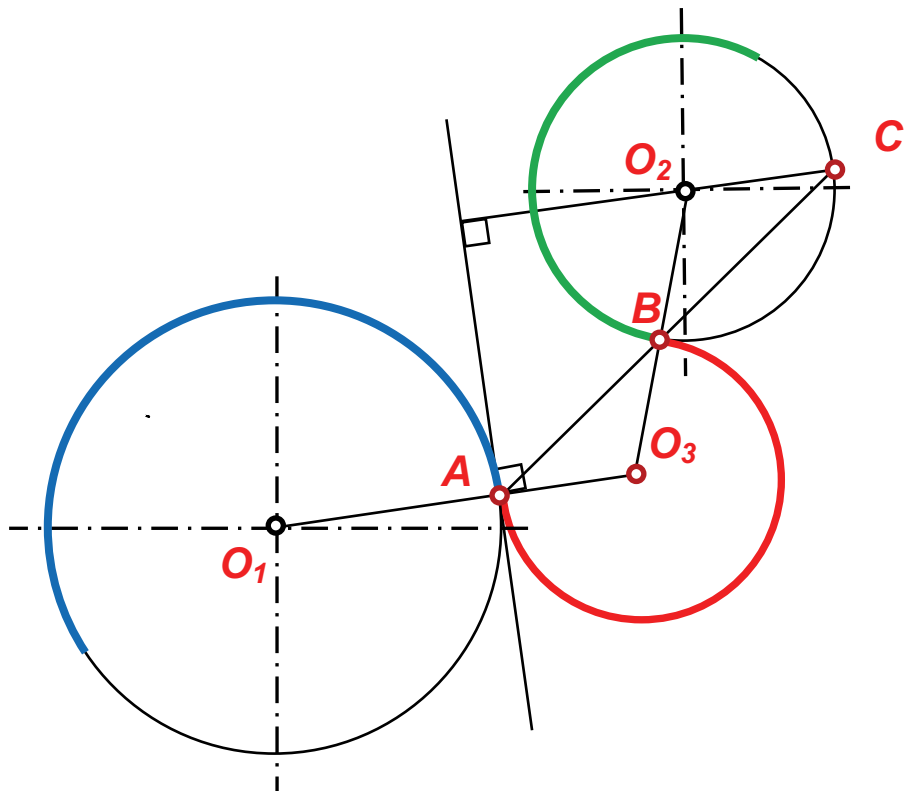


Рисунок 52 – Внешнее сопряжение дуг окружностей в заданной точке  $A$  окружности

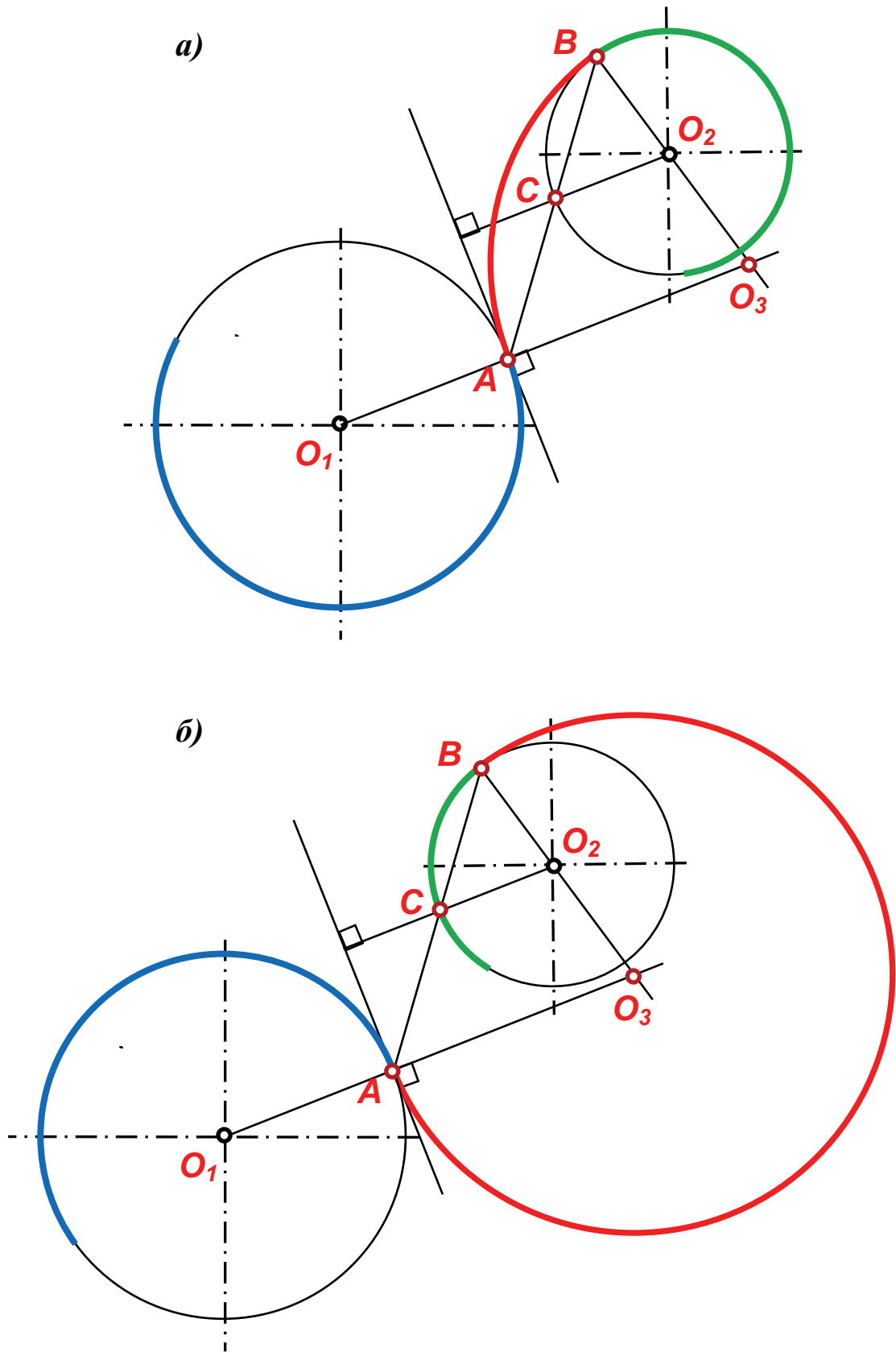
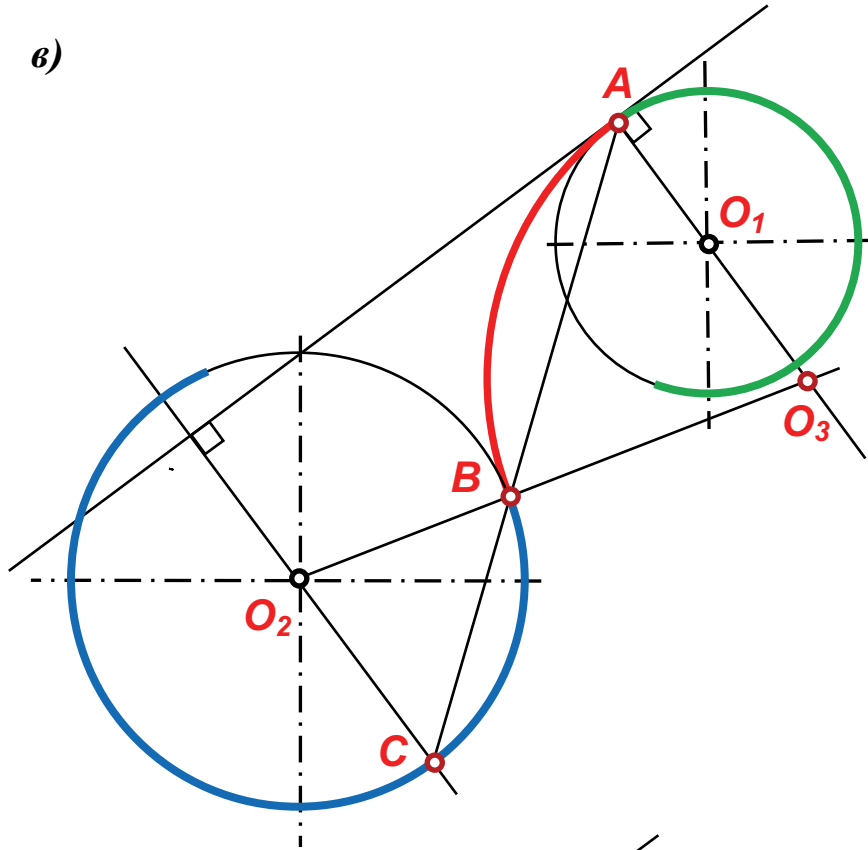


Рисунок 53 – Смешанное сопряжение дуг окружностей в заданной точке  $A$  окружности

б)



а)

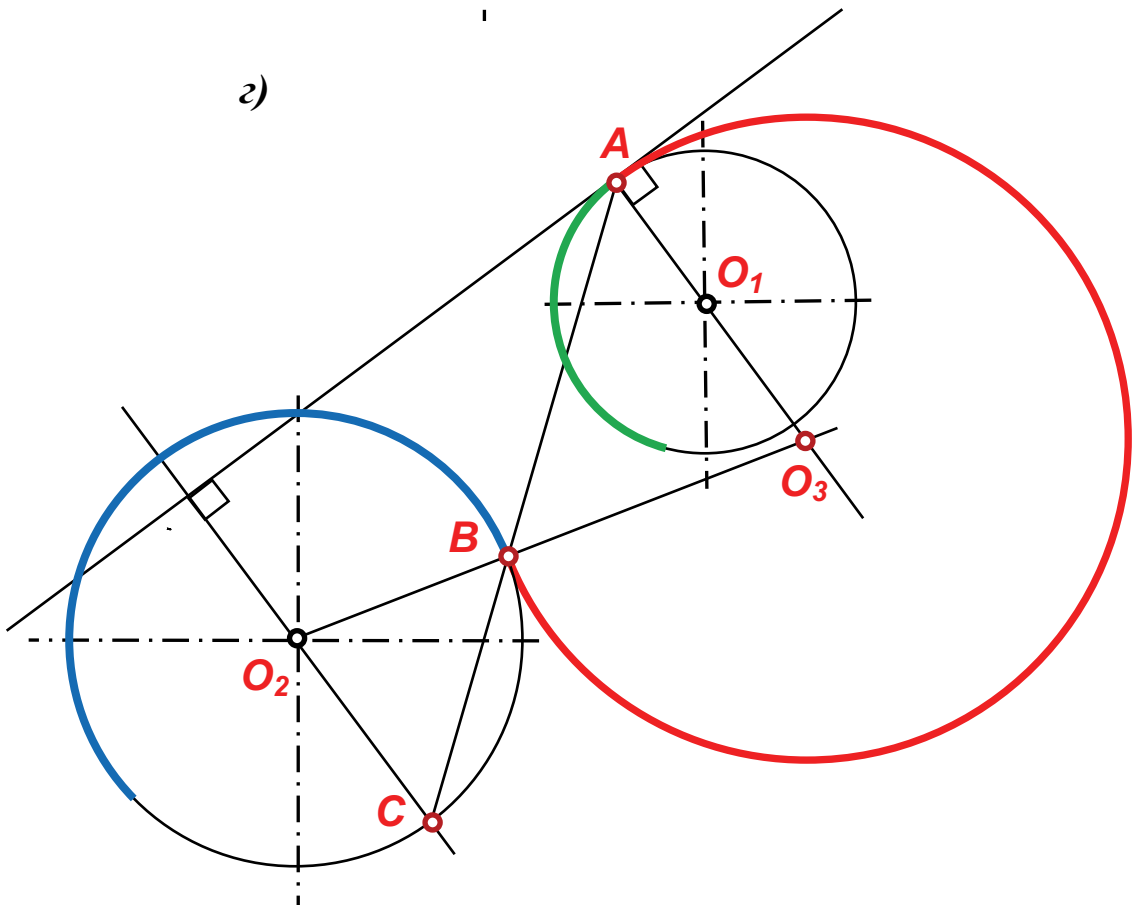


Рисунок 53 (Продолжение) – Смешанное сопряжение дуг окружностей в заданной точке  $A$  окружности

## 6. СОПРЯЖЕНИЕ ДУГ ОКРУЖНОСТЕЙ, РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЦЕНТРАМИ КОТОРЫХ МЕНЬШЕ РАДИУСОВ

На рисунке 54 показаны различные варианты сопряжений окружностей, расстояние между центрами которых меньше суммы их радиусов, т.е. окружности либо пересекаются, либо одна расположена в контуре другой.

В данном случае точками сопряжения  $A$  и  $B$  будут точки пересечения линии, проходящей через центры окружностей  $O_1O_2$  с окружностями, а центром кривизны дуги сопряжения  $O_3$  будет середина отрезка между точками сопряжения  $AB$ .

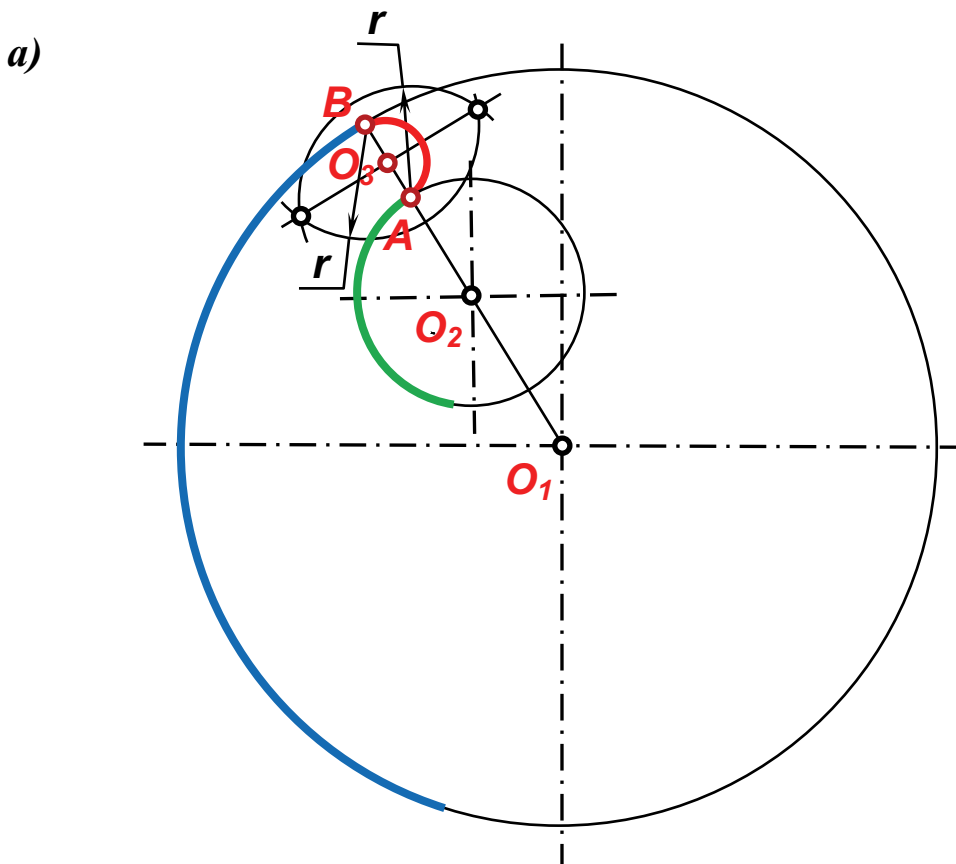


Рисунок 54 – Сопряжение окружностей, расстояние между центрами которых меньше суммы их радиусов

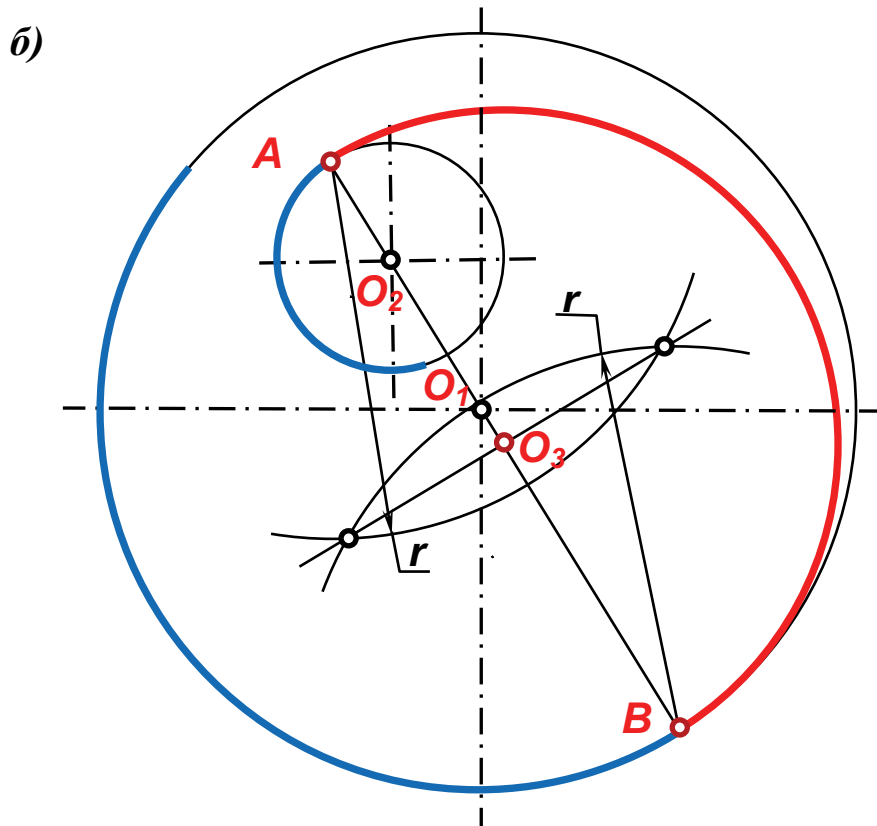


Рисунок 55 – Сопряжение окружностей, расстояние между центрами которых меньше суммы их радиусов

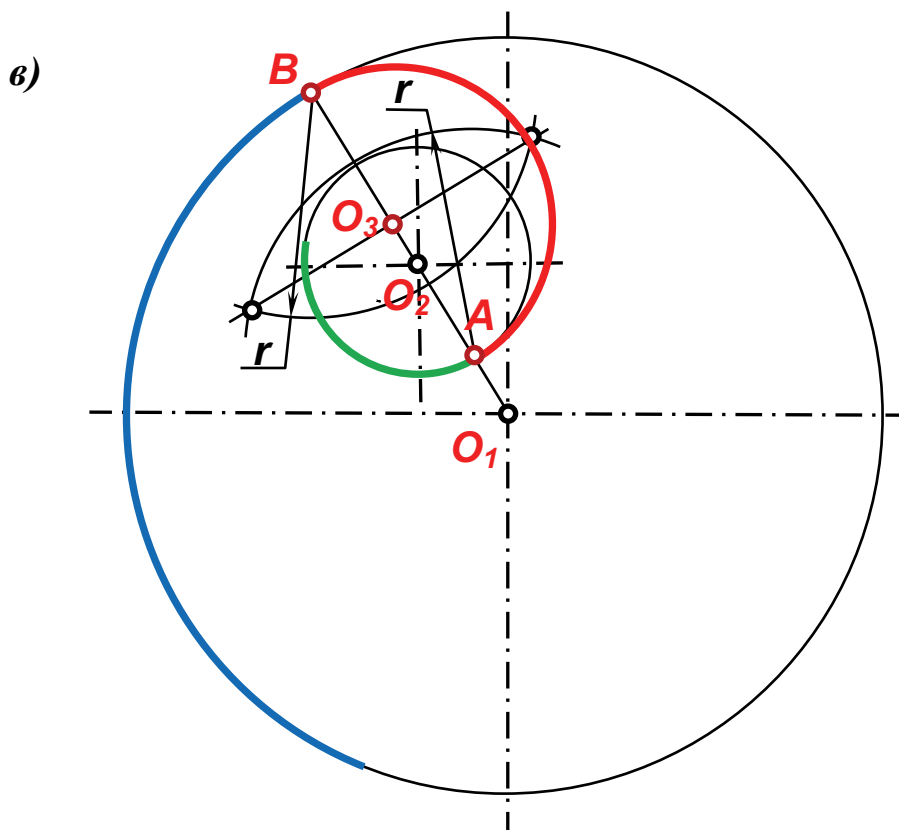


Рисунок 54 (Продолжение) – Сопряжение окружностей, расстояние между центрами которых меньше суммы их радиусов

2)

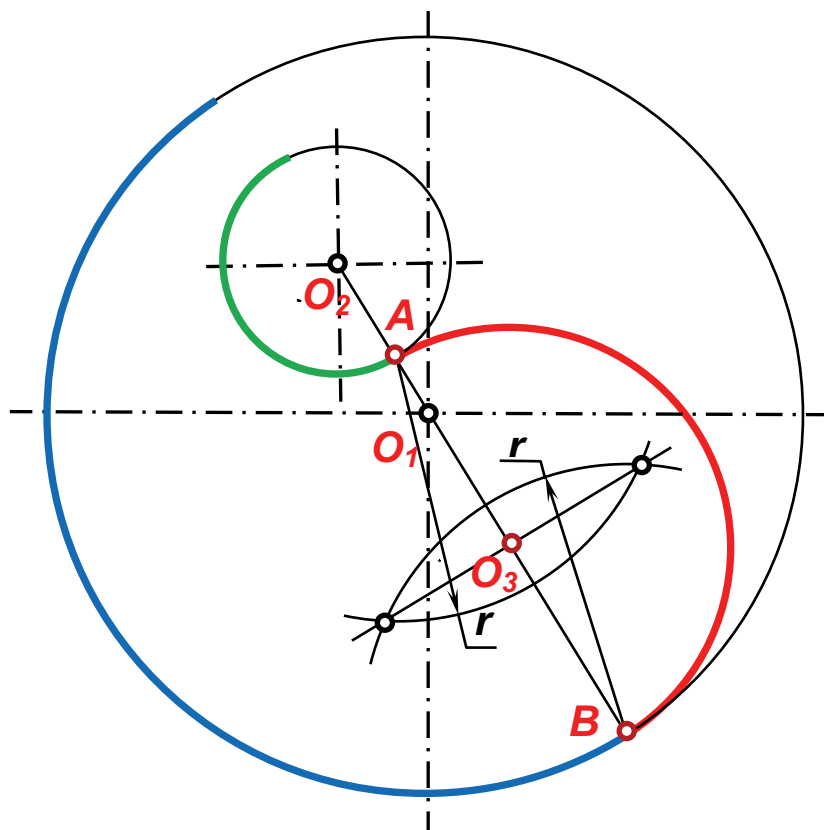


Рисунок 54 (Продолжение) – Сопряжение окружностей, расстояние между центрами которых меньше суммы их радиусов

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов бакалавриата по дисциплине «Прикладная механика». Ч. I: учебное пособие / В. В. Очинский, А. А. Кожухов, В. А. Лиханос и др.; Ставропольский гос. аграрный ун-т. – Ставрополь, 2015. – 32 с.
2. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов бакалавриата по дисциплине «Прикладная механика». Ч. II: учебное пособие / В. В. Очинский, А. А. Кожухов, В. А. Лиханос и др.; Ставропольский гос. аграрный ун-т. - Ставрополь, 2015. - 36 с.
3. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов бакалавриата по дисциплине «Прикладная механика». Ч. III: учебное пособие / В. Е. Кулаев, В. А. Лиханос, А. В. Орлянский и др.; Ставропольский гос. аграрный ун-т. - Ставрополь, 2015. - 68 с.
4. Дадаян А.А. Основы черчения и инженерной графики: Геометрические построения на плоскости и в пространстве: учеб. Пособие. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. 2007. – 464 с.
5. Кулаев В.Е. Использование ЭВМ в расчетно-конструкторских работах как способ повышения производительности и качества курсового проектирования / В.Е. Кулаев, А.В. Орлянский, Л.И. Яковлева, Е.В. Кулаев // Инновационные механизмы эффективного образования. Ставрополь, – 2014. – С. 176-180.
6. Курсовое проектирование деталей машин. В.Е. Кулаев, В.А. Лиханос, А.В. Орлянский, А.В. Бобрышев, Л.И. Яковлева, Н.П. Доронина, Е.В. Кулаев.- Ставрополь, 2003.- 68 с.
7. Левитский В.С. Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежей: Учебник для втузов.-5-е изд., перераб. И доп.- М.: Высш. Шк., 2001.– 429 с.
8. Мельникова И.А. Применение современных технологий в преподавании начертательной геометрии / И.А. Мельникова, Д.С. Калугин, И.А. Орлянская // Инновационные механизмы эффективного образования. Ставрополь, – 2014. С. 211-215.
9. Новичихина Л.И. Справочник по техническому черчению/ Л.И. Новичихина.- 2-е изд., стереотип.- Мн.: Книжный Дом, 2005. – 320 с.
10. Чекмарёв А.А. Начертательная геометрия и черчение: учеб. Для студ. Высш. Учеб. Заведений. – 2-е изд., перераб. И доп.- М.: Высшее образование, 2006. – 471 с.
11. Яковлева Л.И. Системный контроль текущих знаний студентов как способ повышения качества учебного процесса / Л.И. Яковлева, В.Е. Кулаев, А.В. Орлянский, В.Ю. Гальков // Обучение и воспитание: методики и практика. – 2014. –№16. – С. 176-179.
12. Яковлева Л.И. Студенческие олимпиады по графическим дисциплинам / Л.И. Яковлева, В.Ю. Гальков, И.А. Мельникова // Обучение и воспитание: методики и практика. – 2014. – №16. – С. 174-176.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ. ВИДЫ СОПРЯЖЕНИЙ</b>	3
<b>1. КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТЯМ</b>	
1.1. Построение касательной к окружности через точку, лежащую вне окружности	17
1.2. Построение внешней касательной к двум окружностям	18
1.3. Построение касательной к двум окружностям, проходящей между центрами окружностей	19
<b>2. СОПРЯЖЕНИЕ ПРЯМЫХ</b>	
2.1. Сопряжение параллельных прямых	21
2.2. Сопряжение пересекающихся прямых в заданной точке сопряжения	22
2.3. Сопряжение пересекающихся прямых дугой заданного радиуса	23
<b>3. СОПРЯЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ</b>	
3.1. Сопряжение окружности и прямой дугой заданного размера	24
3.2. Сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке $A$ окружности	25
3.3. Сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке $A$ окружности	28
3.4. Сопряжение дуги окружности и не пересекающей её прямой в заданной точке $A$ прямой	31
3.5. Сопряжение дуги окружности и пересекающей её прямой в заданной точке $A$ прямой	34
<b>4. СОПРЯЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ ДУГОЙ ЗАДАННОГО РАЗМЕРА</b>	
4.1. Внешнее сопряжение окружностей дугой заданного размера	37
4.2. Внутреннее сопряжение окружностей дугой заданного размера	38
4.3. Смешанное сопряжение окружностей дугой заданного размера	40
4.4. Смешанные сопряжения пересекающихся окружностей	42
<b>5. СОПРЯЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ <math>A</math> ОКРУЖНОСТИ</b>	45
<b>6. СОПРЯЖЕНИЕ ДУГ ОКРУЖНОСТЕЙ, РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЦЕНТРАМИ КОТОРЫХ МЕНЬШЕ РАДИУСОВ</b>	49
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	52

Учебное издание

**Петенёв Александр Николаевич,  
Орлянский Александр Викторович,  
Гальков Виталий Юрьевич**

# **ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ДЕТАЛЕЙ**

Учебно-методическое пособие

Заведующий издательским отделом *А. В. Андреев*

Подписано в печать 08.09.2015. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Гарнитура «Times New Roman». Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,3.  
Тираж 300 экз. Заказ № 295.

*Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000*

Издательство Ставропольского государственного аграрного университета «АГРУС»,  
355017, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 15.  
Тел/факс: (8652) 35-06-94. E-mail: agrus2007@mail.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии издательско-полиграфического  
комплекса СтГАУ «АГРУС», г. Ставрополь, ул. Пушкина, 15.